现代数学丛书

临界点理论及其应用

张恭庆著

上海科学技术出版社

科技新书目： 118·110
统一书号：13119·1289
定 价： 2.55 元

现代数学丛书

临界点理论及其应用

张恭庆 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是反映临界点理论研究进展的一本专门著作。全书分五章，系统介绍 Люстерник-Шнирельман 理论，Morse 理论，Ambrosetti-Rabinowitz 理论以及它们的发展，并应用这些理论研究微分方程的解的存在性、多重性以及个数估计等问题。对于半线性椭圆边值问题、非线性波方程的周期解问题和 Hamilton 系统周期轨道问题都作了较深入的研究，其中包含许多在几何上或从方程角度看都很有意义的结果。

书中大部分结果是从文献资料中汇集整理的，许多证明经过简化，有些结果尚属初次发表。

本书可用作数学专业研究生教材，也可供微分方程、非线性分析、泛函分析、微分几何、拓扑学等方面的数学工作者参考。

现代数学丛书
临界点理论及其应用
张恭庆 著
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）
新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 10.25 字数 267,000
1986 年 7 月第 1 版 1986 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—4 600

统一书号：13119·1289 定价：2.55 元

CRITICAL POINT THEORY AND ITS APPLICATIONS

CHANG KUNG-CHING

(abstract)

This is a monograph on the contemporary critical point theory, and it might be the first book in this field.

It consists of five chapters: Chapter I, Premilinary, Chapter II, Extremum theory, Chapter III, Minimax theory, Chapter IV, Category theory and index theory, Chapter V, Morse theory and its applications.

The basic theories of Ljusternik-Schnierelman, of Morse, as well as of Ambrosetti-Rabinowitz and their variants, are systematically developed. They are applied to study certain existence theorems, multiple solution theorems, and the estimations of the number of solutions of various kinds of differential equations. In particular, the semilinear elliptic boundary value problems, the periodic solution problems of nonlinear wave equations, and the periodic orbits of Hamiltonian systems are much more dealt with. Several interesting results from geometry and from differential equations are presented.

Most materials in this book are results scattering in recent journals and preprints. There are certain results published firstly.

This book can be used as a text for graduate students in mathematics departments as well as a reference book for those mathematicians working in the fields of nonlinear analysis, differential equations, functional analysis, differential geometry and algebraic topology etc., and interested in critical point theory.

前　言

变分问题有着极为丰富的源泉. 由于从经典力学到场论, 其中所研究的一切物质的运动规律都遵从"变分原理", 即存在着某个泛函, 使得对应的运动方程是它的 Euler 方程, 因此, 求这些 Euler 方程的解便化归为寻求对应泛函的临界点.

古典变分理论旨在确定泛函的极值和极值点. 对这种特殊形式的临界点问题, 在 19 世纪以前, 一直是将其化为微分方程去求解的. Dirichlet 原理可以认为是从反面考察变分问题与方程的关系的最早的例子之一. 它从极小化 Dirichlet 积分出发, 求解 Laplace 方程. 但是直到 Poincaré (1887) 与 Hilbert (1898) 工作发表之前, 这个极小函数的先验存在性却是不为正确推理所支持的, 他们的工作不但证实了 Dirichlet 原理, 而且使得由此产生的极小化序列方法, 连同本世纪初意大利数学家 Tonelli 引进的关于泛函下半连续性的概念, 延续到今天都是研究泛函极值问题的基本手段.

为了从泛函本身的性态判定出未必是极值点的临界点, 极小化序列方法显然是无能为力的. 我们需要完全不同的方法. 因为主要依靠的是拓扑工具, 所以这部分临界点理论又称为大范围变分法. 早在二、三十年代, M. Morse 与 Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман 就分别提出了两种联系紧流形上函数的临界点的行为与流形自身拓扑性质的理论. 通过这些联系, 用流形自身的拓扑不变量可以估计出其上函数临界点的个数. 他们的这两个理论

已被成功地应用到变分学中的测地线问题中去. 然而,这些理论,在相当长时期内,对更多的分析问题却难以应用;相反地,Morse 理论成为微分拓扑的一个重要方面,同时,Л. Ш. 的畴数理论也成了代数拓扑学的有兴趣的课题.

五十年代,M. A. Красносельский 与 M. M. Вайнберг 整理了 Л. Ш. 的工作,并对非线性积分方程进行了研究;六十年代,R. S. Palais, S. Smale 又将 Morse 理论和 Л. Ш. 理论推广到无穷维流形上. 这些都为临界点理论广泛应用到分析问题作了必要的准备.

近十年来,变分理论又有重大的进展. 一方面前述理论更深入地应用到更多的微分方程问题,在方法上有了新的发展;另一方面,由 A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz(1973)提出的山路引理(Mountain Pass lemma)又引出了一系列新的极小极大定理. 这些定理可以处理既无上界又无下界的泛函的变分问题. 在超线性椭圆边值问题、超线性弦振动的周期解问题以及 Hamilton 组的周期轨道问题的研究中,取得了很有意义的新结果.

在本书中,我们把临界点理论看成是变分学的一部分,这就决定了本书一方面要仔细地论述临界点的基本理论,即用拓扑方法判定临界点的存在性并估计临界点的个数;另一方面,又要利用抽象理论去解决具体的变分问题. 因此,我们还要选择合适的泛函框架,并作细致的分析估算.

在内容的选择上,我们固然要介绍临界点理论的基本结果.但却又偏重于近十几年来的进展.因为这些材料至今仍分散在国内、外的文献资料之中,尚未加以整理.

本书第二章介绍求极值的变分理论,侧重于求极值点的新的理论和方法. 包括凸分析与非光滑分析中的极值理论,以及增添约束条件求极值的技巧. 对于应用,我们则力求照顾到问题本身的兴趣和方法上的典型性两个方面.

第三章是以山路引理为中心的各种极小极大定理以及它们的应用,在这一章,我们用一种统一的极小极大原理系统地导出了文

献中出现的各种各样的这种类型的定理.

第四章介绍畴数与指标理论. 它们可以看成是 Л. Ш. 理论及其发展. 在此, 我们建立了无穷维流形上的有对称性的泛函的一种指标与伪指标理论. 并把 $\mathbb{Z}_2$ 群的指标——亏格和 S^1 群的几何指标作为这个一般指标理论的具体体现. 这一章还有许多在微分方程理论中应用的例子. 希望它们能够对提高分析学者的兴趣起一些作用.

第五章是 Morse 理论的无穷维陈述及其应用, 把 Morse 理论应用于微分方程的工作只是近几年的事, 这里有些材料, 例如 Arnold 猜测的解决等, 都是相当新的.

占全书 1/4 篇幅的第一章是准备知识——包括: Banach 空间的微分学、Finsler 流形、横截定理、拓扑度, 以及 Соболев 空间和它上面的微分算子. 这样安排是为了便于阅读. 即使如此, 本书也没能做到完全自封. 对于个别证明较长、或离题太远的定理, 我们仍不得不求教于其它参考文献. 然而, 对于已经熟悉了这部分内容的读者, 这一章完全可以跳过去, 而直接去看后面几章. 有的读者即使不完全熟悉这部分内容, 但若具有较好的数学训练, 也可以先从后面几章读起, 遇到有关的概念和定理时, 再翻到这章来.

本书虽有系统整理日益膨胀的文献资料的目的, 但却无囊括一切研究成果的企图. 这是因为临界点理论正在蓬勃发展, 其成果层出不穷, 面貌日新月异, 要想对它作全面总结显然是不可能的. 我们所要做的只能是抓住其中最本质的思想, 呈现一些重要结果. 为了帮助读者尽快地进入研究前沿, 书中吸取的材料有的刚刚刊出不久, 有的尚属首次发表. 每章之末附有参考文献介绍有意义的工作和进展.

临界点理论是由分析与拓扑结合而成的. 但是拓扑工具的使用目前尚处于萌芽状态. 随着对非线性问题研究的深入发展, 肯定会有更深奥的拓扑理论与更精密的分析方法结合的工作出现. 本书愿为此起抛砖引玉的作用.

这本书第三、四、五章的大部分材料，是根据作者在中国科学院数学研究所与北京大学联合举办的非线性分析讨论班上的讲稿改写而成的．部分章节曾在国内外专业会议上报告过．由于本书材料较新，编写过程中没有现成的书可以借鉴，许多证明又是作者重新给出的；因此疏漏错误必然不少，加之多次修改，仓促成书，前后脱节在所难免．真诚地欢迎读者批评指正．

陈斌、刘嘉荃、张东同志阅读过本书初稿，提出了许多宝贵的修改意见，更正了不少错误．最后又由浙江大学董光昌教授审阅了初稿．作者在此对他们表示深切的感谢．

张 恭 庆

1983.12于北京大学中关园

目　录

第一章 准备知识

在微积分里，把求函数的极值，化归为求这函数的稳定点，即求其导数为零的点．在变分法中，也是把求泛函的极值，化归到求这泛函的稳定点．统一起来说，对于 Banach 空间上给定的函数，我们要求它"导数"为零的点．如果再把函数限制在一个可微流形上，例如说，求约束极值问题，我们还要在无穷维流形上考察这函数的导数．这一章是为以后几章作准备的．

首先，在§1介绍Banach空间上的微分学．这部分内容现在已经有许多著作可供阅读．为便于查阅，我们将罗列其中的基本内容，并简略地勾划出它们的证明．已经熟悉了这些材料的读者，可以越过这节．§2介绍 Banach 流形的基本概念以及 Finsler 构造．在这里我们不准备作详尽的讨论，只是为了第三章§1的需要而挑选出最必要的材料，如向量场和局部流的存在性，以及 Finsler 流形的可度量化问题．

大范围变分法是用代数拓扑的方法研究变分问题．在后面几章经常要遇到流形的相交性质和从一个拓扑空间到另一个拓扑空间是否存在连续映射的问题．Brouwer 拓扑度和它的无穷维推广—— Leray Schauder 度是这方面的一个有用的工具．在§4我们从头建立这一理论，并介绍解析映射度的计算．

§3是关于横截概念和 Sard 定理的介绍．引进这部分内容，一方面是为第四章 Morse 理论的需要；另一方面也是因为 Sard 定理与 Brouwer 度结合起来被用于证明 $\mathbb{Z}_2$ 群的以及 S^1 群的

Borsuk Ulam 定理．而这些结果正是第三章的理论基础．

Соболев 空间是抽象泛函分析理论应用到偏微分算子问题中去的桥梁．即便有了很好的泛函框架，如不熟悉 Соболев 空间的性质，也难以把它们应用到具体的微分方程中去．§5 是对 Соболев 空间及嵌入定理所作的一个快速的简略的介绍．尽管有的地方不得不求助于其它参考书籍，但通过这不多的几页，读者当能领悟这部分内容的梗概．

§6 是三个典型的线性微分算子 $-\Delta$, $\Box$ 以及 $J\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，它们是在椭圆边值问题、半线性弦振动问题以及 Hamilton 组的周期解问题中经常遇到的．

§1 Banach 空间上的微分学

在这一节我们简短地回顾一下 Banach 空间之间的映射的连续性，可微性，以及微分学的基本事实．由于这部分内容在近代数学中已经如此基本，以致于读者可以从许多教科书上找到它们的详尽讨论和证明．所以在这一节，我们将满足于罗列基本的术语定义和定理．

以下设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间．$\mathbf{f}$: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是一个映射．

1.1 非线性映射的有界性与连续性

定义 1.1 $\mathbf{f}$: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 称为

在 $x_0\in\mathscr{X}$ 连续，指 $x_n\to x_0(\mathscr{X})\Rightarrow\mathbf{f}(x_n)\to\mathbf{f}(x_0)(\mathscr{Y})$；

在 $U\subset\mathscr{X}$ 连续，指 $\forall x_0\in U$, $\mathbf{f}$ 在 x_0 连续；

在 $U\subset\mathscr{X}$ 一致连续，指 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,

$$\|x-x'\|_{\mathscr{X}}<\delta\Rightarrow\|\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x')\|_{\mathscr{Y}}<\varepsilon.$$

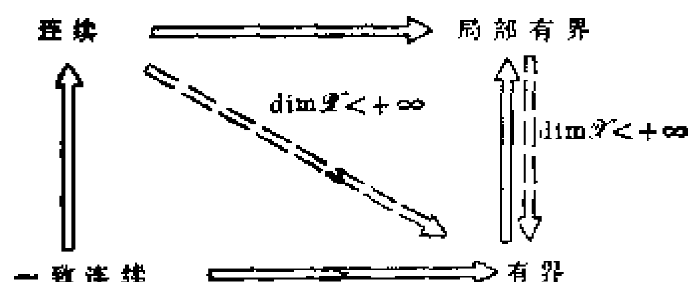
定义 1.2 $\mathbf{f}$: $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 称为是

局部有界的，指 $\forall x_0\in\mathscr{X}$, $\exists x_0$ 的一个邻域 $U(x_0)$ 使得

$$\sup\{\|\mathbf{f}(x)\|_{\mathscr{Y}}|x\in U(x_0)\}<+\infty;$$

有界的，指$\mathbf{f}$映有界集为有界集.

当$\mathbf{f}$是一个线性映射时，所有这五个概念是等价的．然而在一般情况下，只有下列关系：



图中虚线箭头是在条件：$\mathscr{X}$是有穷维的前提下成立的．在一般的情形，这是不对的.

作为例子，我们考察下列复合函数算子：设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是一个可测集，$\mathbf{f}: \Omega\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$．定义

$$F: u(x)\mapsto\mathbf{f}(x, u(x)),\tag{1.1}$$

称为复合函数算子，又称为 Немыцкий 算子.

在对Ω，$\mathbf{f}$适当添加条件后，我们来考察F在适当空间中的有界性和连续性．Немыцкий 算子在非线性分析中经常遇到.

1° 设Ω是一个紧集，而$\mathbf{f}$是一个连续映射．不难验证：F是$C(\Omega)$到自身的有界连续算子，其中$C(\Omega)$是Ω上的连续函数空间.

2° 设Ω是$\mathbb{R}^n$的一个可测集，$\mathbf{f}$满足下列 Caratheodory 条件：

(1) 对 a. e. $x\in\Omega$，$t\mapsto\mathbf{f}(x, t)$是连续函数，

(2) $\forall t\in\mathbb{R}^1$，$x\mapsto\mathbf{f}(x, t)$是可测的.

因为有下列推广的 Лузин 定理：

$\mathbf{f}$满足 Caratheodory 条件

$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists\text{可测集 }E\subset\Omega,\ \operatorname{mes}(E)<\varepsilon$$

$$\text{使得 }\mathbf{f}\text{ 在}(\Omega\backslash E)\times\mathbb{R}^1\text{ 上是连续的.}$$

(可以仿照实变函数论中 Лузин 定理的证明直接去证，也可参看 Вайнберг [Vai 1, p. 196～200])；所以对于满足 Caratheodory

条件的函数 $\mathbf{f}(x, t)$，只要 $u(x)$ 是可测函数，$\mathbf{f}(x, u(x))$ 就是可测的.

定理 1.1 设 $p_1, p_2 \geqslant 1$，又设有 $b \in L^{p_2}(\Omega)$ 以及常数 $a>0$，使得满足 Caratheodory 条件的函数 $\mathbf{f}$ 适合：

$$|\mathbf{f}(x, t)| \leqslant b(x) + a|t|^{\frac{p_1}{p_2}};$$

则(1.1)式中定义的 Немыцкий 算子是 $L^{p_1}(\Omega) \to L^{p_2}(\Omega)$ 的有界，连续算子.

证明 1° 有界性从 Minkowski 不等式立得：

$$\|Fu\|_{p_2} \leqslant \|b\|_{p_2} + a\|u\|_{p_1}^{\frac{p_1}{p_2}}. \tag{1.2}$$

2° 兹证连续性. 用反证法，倘若 F 不连续，则有 $\varepsilon_0>0$ 及 $\{u_n\}_0^\infty \subset L^{p_1}$，使得

$$\|u_n - u_0\|_{p_1} \to 0,$$

$$\|Fu_n - Fu_0\|_{p_2} \geqslant \varepsilon_0.$$

记
$$f_n(x) = \mathbf{f}(x, u_n(x)),$$

$$g_n(x) = b(x) + a|u_n(x)|^{\frac{p_1}{p_2}}, \quad n=0, 1, 2, \cdots,$$

则可以抽出子列，仍记作 f_n, g_n 使得

$$f_n \to f_0 \quad \text{a. e.}, \tag{1.3}$$

$$g_n \to g_0 \quad \text{a. e.}, \tag{1.4}$$

$$|f_n| \leqslant g_n, \quad n=1, 2, \cdots.$$

由于
$$\big||u_n|^{p_1} - |u_0|^{p_1}\big| \leqslant |u_n|^{p_1} + |u_0|^{p_1},$$

按 Fatou 定理，

$$\int \underline{\lim}\, [|u_n|^{p_1} + |u_0|^{p_1} - \big||u_n|^{p_1} - |u_0|^{p_1}\big|]$$

$$\leqslant \underline{\lim} \int [|u_n|^{p_1} + |u_0|^{p_1} - \big||u_n|^{p_1} - |u_0|^{p_1}\big|],$$

即得
$$2\int |u_0|^{p_1} \leqslant 2\int |u_0|^{p_1} - \overline{\lim} \int \big||u_n|^{p_1} - |u_0|^{p_1}\big|.$$

所以有
$$\lim \int \big||u_n|^{p_1} - |u_0|^{p_1}\big| = 0,$$

从而

$$\int |g_n - g_0|^{p_2} = a^{p_2} \int \left| |u_n|^{\frac{p_1}{p_2}} - |u_0|^{\frac{p_1}{p_2}} \right|^{p_2}$$

$$\leqslant a^{p_2} \int \big| |u_n|^{p_1} - |u_0|^{p_1} \big| \to 0, \text{ 当 } n \to \infty.$$

由此推出 $$\int |g_n|^{p_2} \to \int |g_0|^{p_2}.$$

再应用初等不等式,

$$\begin{aligned} |f_n - f_0|^{p_2} &\leqslant 2^{p_2}(|f_n|^{p_2} + |f_0|^{p_2}) \\ &\leqslant 2^{p_2}(|g_n|^{p_2} + |g_0|^{p_2}), \end{aligned} \tag{1.5}$$

以及 Fatou 定理,

$$\int \underline{\lim} \, [2^{p_2}(|g_n|^{p_2} + |g_0|^{p_2}) - |f_n - f_0|^{p_2}]$$

$$\leqslant \underline{\lim} \int [2^{p_2}(|g_n|^{p_2} + |g_0|^{p_2}) - |f_n - f_0|^{p_2}],$$

联合(1.3)与(1.4)便得到

$$2^{p_2+1} \int |g_0|^{p_2} \leqslant 2^{p_2+1} \int |g_0|^{p_2} - \overline{\lim} \int |f_n - f_0|^{p_2}.$$

所以有 $$\lim \int |f_n - f_0|^{p_2} = 0.$$

这与 $\|Fu_n - Fu_0\|_{p_2} \geqslant \varepsilon_0$ 矛盾.

注 1.1 不难把上述结论扩充到下列形式的函数 $\mathbf{f}: \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$. 称其满足 Caratheodory 条件是指:

(1) 对 a.e. $x \in \Omega$, $y \to \mathbf{f}(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ 的连续函数;

(2) $\forall y \in \mathbb{R}^N$, $x \mapsto \mathbf{f}(x, y)$ 是可测的.

定理 1.1 可以推广如下:

设有 $p_1, \cdots, p_N, q \geqslant 1$, 又有 $b \in L^q(\Omega)^N$ 及常数 $a > 0$, 使得

$$\|\mathbf{f}(x, y)\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant b(x) + a(|y_1|^{\frac{p_1}{q}} + \cdots + |y_N|^{\frac{p_N}{q}}),$$

则 Немыцкий 算子

$$F: u(x) \mapsto \mathbf{f}(x, u(x))$$

是 $\prod_{j=1}^{N} L^{p_j}(\Omega) \to L^q(\Omega)^m$ 的有界连续算子.

1.2 微分学

和多元函数微分学一样，我们来考察映射 $\mathbf{f}: U\to\mathscr{Y}$ 的导数，这里 $U\subset\mathscr{X}$ 是一个开集.

相应于方向导数的概念的推广是

定义 1.3 称 $\mathbf{f}$ 在 $x_0\in U$ Gateaux 可微，是指 $\forall h\in\mathscr{X}$，$\exists d\mathbf{f}(x_0, h)\in\mathscr{Y}$，使得

$$\mathbf{f}(x_0+th)-\mathbf{f}(x_0)-t d\mathbf{f}(x_0, h)=o(t)$$

$$\text{当 } t\to+0,\ x_0+th\in U.$$

$d\mathbf{f}(x_0, h)$ 称为是 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处沿方向 h 的 Gateaux 导数.

由定义立得下列简单性质：

1° $\mathbf{f}$ 若在 x_0 Gateaux 可微，则其 Gateaux 导数必是唯一的.

2° $d\mathbf{f}(x_0, th)=t d\mathbf{f}(x_0, h)$，$\forall t>0$.

3° 设 $\mathbf{f}$ 在 $x_0\in U$ 处是 G 可微的，则 $\forall y^*\in\mathscr{Y}^*$，函数 $\varphi(t)=\langle y^*, \mathbf{f}(x_0+th)\rangle$，$\forall h\in\mathscr{X}$，在 $t=0$ 处右可微，并且若用 φ'_r 表示其右导数，有

$$\varphi'_r(0)=\langle y^*, d\mathbf{f}(x_0, h)\rangle.$$

又若 $\mathbf{f}$ 在线段 x_0+th，$t\in[0, 1]$ 上每点都是 G 可微的，则函数 $\varphi(t)$ 在 $[0, 1]$ 上是右可微的，并且

$$\varphi'(t)=\langle y^*, d\mathbf{f}(x_0+th, h)\rangle.$$

4° (中值定理) 设 $U\subset\mathscr{X}$ 是一个开集，$\mathbf{f}: U\to\mathscr{Y}$ 是 G 可微的，又设线段 $x+th\in U$，$t\in[0, 1]$，则

$$\|\mathbf{f}(x+h)-\mathbf{f}(x)\|\leqslant\sup_{0<t<1}\|d\mathbf{f}(x+th, h)\|.$$

证明 对函数 $\varphi^*_y(t)=\langle y^*, \mathbf{f}(x+h)\rangle$，$\forall y^*\in\mathscr{Y}^*$，$\|y^*\|=1$，应用中值定理以及 Hahn Banach 定理.

相应于全微分概念的推广是

定义 1.4 称 $\mathbf{f}$ 在 $x_0\in U$ 是 Fréchet 可微的(简作 F-可微)，是指 $\exists A\in\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，使得 $\forall h\in\mathscr{X}$，$x_0+h\in U$ 都有

$$\|\mathbf{f}(x_0+h)-\mathbf{f}(x_0)-Ah\|_{\mathscr{Y}}=o(\|h\|_{\mathscr{X}}),$$

当 $\|h\|_{\mathscr{X}}\to 0$. 这时 A 称为是 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处的 Fréchet 导数(简作 F-

导数)，记作 $\mathbf{f}'(x_0)$.

由定义易见下列简单性质：

1° $\mathbf{f}$ 在 x_0 处 F-可微，则其 F 导数必是唯一的。

2° 若 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处 F-可微，则必 G 可微，并且

$$d\mathbf{f}(x_0, h)=\mathbf{f}'(x_0)h.$$

反之，一般是不对的.

但有

定理 1.2 设 $\mathbf{f}$ 在 x_0 的一个邻域 U 内处处 G 可微，并设 $\forall x\in U$ 有 $A(x)\in\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$，使得

$$d\mathbf{f}(x, h)=A(x)h \quad \forall h\in\mathscr{X}.$$

倘若 $x\mapsto A(x)$ 在 x_0 处还依 $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 模连续；则 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处是 F-可微的，并且 $\mathbf{f}'(x_0)=A(x_0)$.

3° (锁链法则). 设 $\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}$ 都是 Banach 空间，$U\subset\mathscr{X}$，$V\subset\mathscr{Y}$ 是开子集. 又设 $\mathbf{f}: U\to V$ 在 x_0 处 F-可微，$g: V\to\mathscr{Z}$ 在 $\mathbf{f}(x_0)$处 F-可微；则 $g\circ\mathbf{f}: U\to\mathscr{Z}$ 在 x_0 处也是 F-可微的，并有

$$(g\circ\mathbf{f})'(x_0)=g'\circ\mathbf{f}(x_0)\mathbf{f}'(x_0).$$

高阶导数的概念要求引进多线性算子. 设 $\mathbf{f}: \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是 F-可微的，在每点 x 处有 F-导数 $\mathbf{f}'(x)$，我们再把它看成是 $\mathscr{X}$ 上的函数，$\mathbf{f}': \mathscr{X}\to\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. 仿普通函数，把二阶导数定义为导函数的导数，那么 $\forall x\in\mathscr{X}$，$\mathbf{f}''(x)$将是 $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$ 中的算子. 如此下去，一般地 k 阶导数 $\mathbf{f}^{(k)}(x)$将是

$$\underbrace{\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{L}}_{k\text{ 次}}(\mathscr{X}, \cdots, \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})))$$

中的算子.

为了刻划空间 $\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{L}(\mathscr{X}, \cdots, \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})))$，我们引入多线性算子的概念.

设 $\mathscr{X}_i$, $i=1, \cdots, n$ 是 Banach 空间，各有模 $\|\cdot\|_i$, $i=1, \cdots, n$. 令 $X=\prod_{i=1}^{n}\mathscr{X}_i$ 表其乘积空间 $\{x=(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i\in\mathscr{X}_i, i=1, \cdots, n\}$,

$$\|x\|_{\mathscr{X}}=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_{\mathscr{X}_i},$$

则 X 是一个 Banach 空间. 设 $\mathscr{Y}$ 是另一个 Banach 空间, 有模 $\|\cdot\|_{\mathscr{Y}}$.

算子 $A: X\to\mathscr{Y}$ 称为是多线性的, 是指: $A(x_1, \cdots, x_n)$ 对于任意固定其中 $n-1$ 个变元时, 作为剩下的一个变元的映射是线性的.

对于多线性算子 A, 称它是有界的, 如果有常数 $M>0$, 使得

$$\|A(x_1, \cdots, x_n)\|_{\mathscr{Y}}\leqslant M\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|_{\mathscr{X}_i}.$$

和线性算子一样, 对于多线性算子,

连续 $\Leftrightarrow$ 有界.

一切 $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 的多线性连续算子组成一个线性空间, 规定模

$$\|A\|=\sup_{\|x_i\|_{\mathscr{X}_i}\leqslant 1, i=1,\cdots,n}\|A(x_1, \cdots, x_n)\|_{\mathscr{Y}}. \tag{1.6}$$

我们把这个赋范空间记作 $\mathscr{L}(\mathscr{X}_1, \cdots, \mathscr{X}_n; \mathscr{Y})$. 容易验证: 它是一个 Banach 空间. 此外还有下列事实:

引理 1.1 空间 $\mathscr{L}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2; \mathscr{Y})$ 与空间 $\mathscr{L}(\mathscr{X}_1, \mathscr{L}(\mathscr{X}_2, \mathscr{Y}))$ 等距同构.

再由数学归纳法推出:

推论 1.1 $\mathscr{L}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \cdots, \mathscr{X}_n; \mathscr{Y})$ 等距同构于 $\mathscr{L}(\mathscr{X}_1, \mathscr{L}(\mathscr{X}_2, \cdots, \mathscr{L}(\mathscr{X}_n, \mathscr{Y}))\cdots)$.

以下记 $\mathscr{L}^0(\mathscr{X}, \mathscr{Y})=\mathscr{Y}$, $\mathscr{L}^{k+1}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})=\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{L}^k(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$, $k=0, 1, 2, \cdots$. 我们来逐次定义高阶导数.

设 $\mathbf{f}: U\to\mathscr{Y}$, 又设 $\mathbf{f}^{(k)}(x)$ 在 U 上有定义, 并且 $\mathbf{f}^{(k)}: U\to\mathscr{L}^k(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 在点 $x_0\in U$ 还是 F-可微的; 则称 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处 $k+1$ 阶 F-可微, 记 $\mathbf{f}^{(k)}$ 在 x_0 处的 F-导数为 $\mathbf{f}^{(k+1)}(x_0)\in\mathscr{L}^{k+1}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, 称它为 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处的 $k+1$ 阶 F 导数. 如果 $\mathbf{f}^{(k)}(x)$ 在 U 上还是连续的, 则称 $\mathbf{f}$ 在 U 上 k 阶连续 F-可微, 记作 $\mathbf{f}\in C^k(U, \mathscr{Y})$.

又设 k 是一个正整数, $\mathbf{f}\in C^{k-1}(U, \mathscr{Y})$, 并且 $\forall x_0\in U$, 存在 x_0 的一个邻域 $V(x_0)\subset U$, 和常数 $K>0$, 使得

$$\|\mathbf{f}^{(k-1)}(x)-\mathbf{f}^{(k-1)}(y)\|\leqslant K\|x-y\| \quad \forall x, y\in V(x_0), \qquad (1.7)$$

则称 $\mathbf{f}^{(k-1)}$ 在 U 满足局部 Lipschitz 条件，记作 $\mathbf{f}\in C^{k-0}(U, \mathscr{Y})$.

利用中值定理推得：$\mathbf{f}\in C^k(U, \mathscr{Y})\Rightarrow \mathbf{f}\in C^{k-0}(U, \mathscr{Y})$.

由推论 1.1, $\mathbf{f}^{(k)}(x)$ 现在既可以看成是 $\mathscr{L}^k(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ 中的元素，也可以看成是 $\mathscr{L}(\underbrace{\mathscr{X}\times\cdots\times\mathscr{X}}_{k}, \mathscr{Y})$ 中的多线性连续算子．然而采用后一种看法无论在理论上或是在计算上都是便利的．

利用锁链法则和数学归纳法不难验证下列公式．设

$$\mathbf{f}\in C^k(U, \mathscr{Y}),\ x_0\in U;\ 则$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t_1\cdots\partial t_k}\mathbf{f}\left(x_0+\sum_{j=1}^k t_j h_j\right)\Bigg|_{t_1=\cdots=t_k=0}=\mathbf{f}^{(k)}(x_0)(h_1, \cdots, h_k), \qquad (1.8)$$

$\forall h_1, \cdots, h_k\in\mathscr{X}$.

以下设 $\mathscr{X}_1=\cdots=\mathscr{X}_n=\mathscr{X}$, $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X}_1,\cdots,\mathscr{X}_n;\ \mathscr{Y})$，称 A 是对称的，是指对于任意 $\sigma=(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)\in\mathfrak{S}_n$, 其中 $\mathfrak{S}_n$ 表示 $(1, 2, \cdots, n)$ 的排列群，都有

$$A(x_1, \cdots, x_n)=A(x_{\sigma_1}, \cdots, x_{\sigma_n}).$$

一切对称连续 n-线性算子的全体记作 $\mathscr{L}_s^n(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

引理 1.2　设 $\mathbf{f}: U\to\mathscr{Y}$ 在 $x_0\in U$ 处二阶 F-可微，则

$$\mathbf{f}^{(2)}(x_0)\in\mathscr{L}_s^2(\mathscr{X}, \mathscr{Y}),\ 即$$

$$\mathbf{f}^{(2)}(x_0)(h_1, h_2)=\mathbf{f}^{(2)}(x_0)(h_2, h_1) \quad \forall h_1, h_2\in\mathscr{X}.$$

证明　先化到数值函数，应用公式 (1.8) 以及 Hahn Banach 定理．

联合引理 1.1, 1.2, 再用数学归纳法可得

定理 1.3　设 $\mathbf{f}\in C^n(U, \mathscr{Y})$, 则 $\mathbf{f}^{(n)}(x)\in\mathscr{L}_s^n(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, $\forall x\in U$.

此外还有下列 Taylor 展开式．

定理 1.4　设 $\mathbf{f}\in C^n(U, \mathscr{Y})$, 又设线段 $\{x_0+th\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}\subset U$；则

$$\mathbf{f}(x_0+h)=\sum_{k=0}^n\frac{\mathbf{f}^{(k)}(x_0)h^{(k)}}{k!}+R_n(x_0, h)h^{(n)}, \qquad (1.9)$$

其中 $h^{(k)}$ 表示 $\underbrace{(h,\cdots,h)}_{k个}$，而 $R_n(x_0, h)\in\mathscr{L}_s^n(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，

$$R_n(x_0, h)=\int_0^1\frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\{\mathbf{f}^{(n)}(x_0+th)-\mathbf{f}^{(n)}(x_0)\}dt.$$

证明 化到数值函数，利用数值函数的 Taylor 公式以及 Hahn Banach 定理.

和普通函数一样，可以推广偏导数的概念于取值在 Banach 空间的函数. 设 $U\times V$ 是 Banach 空间 $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 中 (x_0, y_0) 的一个开邻域，$\mathbf{f}: U\times V\to\mathscr{Z}$，称 $\mathbf{f}$ 在 (x_0, y_0) 处有关于 x(或 y) 的偏导数，是指：$x\mapsto\mathbf{f}(x, y_0)$ (或 $y\mapsto\mathbf{f}(x_0, y)$) 是 $U\to\mathscr{Z}$ (或 $V\to\mathscr{Z}$) 的 F-可微函数，并称它在 x_0 (或 y_0) 处的 F-导数为 $\mathbf{f}$ 关于 x(或 y) 的在 (x_0, y_0) 处的偏导数，记作 $\mathbf{f}'_x(x_0, y_0)$ (或 $\mathbf{f}'_y(x_0, y_0)$). 还可以证明

定理 1.5 设 $\mathbf{f}: U\times V\to\mathscr{Z}$ 在 (x_0, y_0) 的一个邻域内有连续的偏导数 $\mathbf{f}'_x(x, y)$ 及 $\mathbf{f}'_y(x, y)$；则 $\mathbf{f}$ 在 (x_0, y_0) 处是 F-可微的. 反之，若 $\mathbf{f}$ 在 (x_0, y_0) 处 F-可微，则 $\mathbf{f}$ 在 (x_0, y_0) 处有关于 x 和 y 的偏导数；并且

$$\mathbf{f}'(x_0, y_0)(u, v)=\mathbf{f}'_x(x_0, y_0)(u)+\mathbf{f}'_y(x_0, y_0)(v)$$

$\forall(u, v)\in\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$.

在定义 $\mathbf{f}'_y(x_0, y_0)$ 时，只需设 $\mathscr{X}$ 是一个拓扑空间.

1.3 隐函数定理

数值的隐函数定理平行地推广为

定理 1.6 设 $\mathscr{X}$ 是一个拓扑空间，$\mathscr{Y}$，$\mathscr{Z}$ 是 Banach 空间，$\mathscr{O}$ 是 $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ 中的一个开集，$(x_0, y_0)\in\mathscr{O}$. 又设 $\mathbf{f}: \mathscr{O}\to\mathscr{Z}$ 是连续的. 倘若

(1) $\mathbf{f}(x_0, y_0)=\theta$；

(2) $\forall(x, y)\in\mathscr{O}$，$\mathbf{f}'_y(x, y)$ 存在且连续，

并且 $\mathbf{f}'_y(x_0, y_0)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Z},\mathscr{Y})$.

则必存在 x_0 的一个邻域 U 和 y_0 的一个邻域 V，以及唯一的连续映射 $\varphi: U\to V$，满足：

$$\varphi(x_0)=y_0,$$
$$\mathbf{f}(x,\ \varphi(x))\equiv\theta\quad\forall x\in U,$$
$$U\times V\subset\mathcal{O}.$$

此外，若 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间，又若 $\mathbf{f}\in C^p(\mathcal{O},\ \mathscr{Z})$，$p\geqslant1$；则 $\varphi\in C^p(U,\ \mathscr{Y})$，并且有

$$\varphi'(x)=-[\mathbf{f}'_y(x,\ \varphi(x))]^{-1}\cdot\mathbf{f}'_x(x,\ \varphi(x)).$$

推论 1.2(反函数定理) 设 $\mathbf{f}: U\to\mathscr{Y}$ 在开集 U 内有连续的 F-导数 $\mathbf{f}'(x_0)$. 若设 $\mathbf{f}'(x_0)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\ \mathscr{X})$，$x_0\in U$. 则必存在 x_0 的一个邻域 $W\subset U$，使得 $\mathbf{f}(W)$ 是 $\mathbf{f}(x_0)$ 的一个开邻域，并且 $\mathbf{f}$ 是 $W\to\mathbf{f}(W)$ 的微分同胚，即 $\mathbf{f}: W\to\mathbf{f}(W)$ 是同胚并且 $\mathbf{f}$ 以及 $\mathbf{f}^{-1}$ 都是可微的. 此外

$$\mathbf{f}^{-1\prime}(y_0)=\mathbf{f}'(\mathbf{f}^{-1}(y_0))^{-1}.\quad 当\quad y_0=\mathbf{f}(x_0).$$

证明 令 $\mathscr{Z}=\mathscr{Y}$，$g(x,\ y)=y-\mathbf{f}(x)$，则因

$$g'_x(x_0,\ y_0)=-\mathbf{f}'(x_0).$$

由隐函数定理得 $x=\varphi(y)$，满足：$x_0=\varphi(y_0)$，以及 $y=\mathbf{f}(\varphi(y))$. 这个 φ 就是 $\mathbf{f}^{-1}$.

推论 1.3 在上述命题中，若设 $\mathbf{f}\in C^p(U,\ \mathscr{Y})$，$p\geqslant1$，则 $\mathbf{f}^{-1}\in C^p(V,\ \mathscr{X})$，$p\geqslant1$，$V$ 是 $\mathscr{Y}$ 中 y_0 的一个开邻域.

注 1.2 推论 1.2 的条件中 $\mathbf{f}'(x_0)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Y},\ \mathscr{X})$ 可以换成较弱的形式：$\mathbf{f}'(x_0)$ 是在上的，那么结论相应地改为 $\mathbf{f}$ 在 x_0 附近是开映射，即有 x_0 的邻域 U 使 $\mathbf{f}(U)$ 是 $\mathbf{f}(x_0)$ 的一个邻域.

反函数和隐函数定理有许多种变形，各种形式适应于不同的需要.

下列形式在微分流形中是经常要用到的. 设 $A\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{Y})$，称它是双裂的，是指：(1) A 的值域 $R(A)$ 在 $\mathscr{Y}$ 中是闭的，且有直和分解：$\mathscr{Y}=R(A)\oplus\mathscr{Y}_2$；(2) $\ker(A)=\{x\in\mathscr{X}\mid Ax=\theta\}$ 在 $\mathscr{X}$ 中也有直和分解：$\mathscr{X}=\ker(A)\oplus\mathscr{X}_2$. 这个概念平行地搬到可微非线性映射上，引出

定义 1.4 设 $U\subset\mathscr{X}$，$\mathbf{f}: U\xrightarrow{C^1}\mathscr{Y}$，$x_0\in U$，称 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处是双裂的，如果 $\mathbf{f}'(x_0)$ 是双裂的.

对于双裂 C^r 映射 $\mathbf{f}$, $r\geqslant 1$, 我们考察两种特殊情形. 为了在 x_0 的一个邻域 U 内局部地研究 $\mathbf{f}$, 不妨设 $x_0=\theta$, 并令 $A=\mathbf{f}'(\theta)$.

1° 首先考察 $\ker(A)=\theta$, 但 $\operatorname{coker}(A)\triangleq\mathscr{Y}/R(A)\neq\{\theta\}$ 的双裂映射. 由于 A 线性, 所以 A 是 $\mathscr{X}\to R(A)$ 的代数与拓扑同构(Banach 逆算子定理).

对于 $\mathbf{f}: U\to\mathscr{Y}$, 如果 $A=\mathbf{f}'(\theta)$ 是这种情形的双裂映射 $(\theta\in U)$. 我们可以把 $\mathscr{X}$ 等同于 $R(A)$, 设 $\mathscr{Y}=R(A)\oplus\mathscr{Y}_2$, 其中 $\mathscr{Y}_2$ 是 $\mathscr{Y}$ 的闭子空间. 考察 $\mathscr{Y}$ 到自身的映射如下:

$$\varphi(y_1, y_2)=\mathbf{f}(A^{-1}y_1)+y_2,$$

其中 $y_i\in\mathscr{Y}_i$, $i=1, 2$, $\mathscr{Y}_1=R(A)$; 则

$$\varphi'(\theta_1, \theta_2)=\begin{pmatrix}\mathbf{f}'(\theta)A^{-1} & 0\\ 0 & I_{\mathscr{Y}_2}\end{pmatrix}=I_{\mathscr{Y}}.$$

由反函数定理, $\exists g=\varphi^{-1}: \varphi(V_1\times V_2)\xrightarrow{C^1}V_1\times V_2$. 即 φ 是 $V_1\times V_2\to\varphi(V_1\times V_2)$的微分同胚. 如今

$$g\circ\mathbf{f}(x)=\varphi^{-1}\varphi(Ax, \theta_2)=Ax,$$

即得一局部微分同胚 $g: \mathscr{Y}\to\mathscr{Y}$, 使得 $g\circ\mathbf{f}$ 局部地是 $\mathscr{X}\to R(A)+\{\theta_2\}$ 的同构. 总结起来有

定理 1.7 设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间, $\theta_1\in U\subset\mathscr{X}$ 是一开集, $\mathbf{f}\in C^1(U, \mathscr{Y})$, $\mathbf{f}(\theta)=\theta$. 若 $\mathbf{f}'(\theta)$是一双裂算子, 且 $\ker\mathbf{f}'(\theta)=\{\theta\}$; 则 $\exists\mathscr{Y}$ 的 θ 邻域到 θ 邻域的一个微分同胚 g 以及 $\mathscr{X}$ 中 θ 的一个邻域 $U_1\subset U$, 使得 $g\circ\mathbf{f}|_{U_1}$ 是 $U_1\to R(A)\times\{\theta_2\}$ 的一个开邻域的一个 C^1 同胚, 其中 θ_2 是 $\operatorname{coker}(A)$ 中的零元.

在微分几何中, 把小空间 $\mathbb{R}^n$ 嵌入到大空间 $\mathbb{R}^{n+m}$, $m\geqslant 0$, 的正则映射:

$$\begin{matrix} x=(x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \hat{x}=(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0), \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^{n+m} \end{matrix}$$

称作正则浸没(canonical immersion).

在定理 1.7 中，当 $\mathscr{X}=\mathbb{R}^n$, $\mathscr{Y}=\mathbb{R}^{n+m}$ 时，

$$\mathbf{f}(x)=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1(x)\\ \vdots\\ \mathbf{f}_{n+m}(x)\end{pmatrix},\ \mathbf{f}'(\theta)=\left(\frac{\partial\mathbf{f}_i(\theta)}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le n+m\\ 1\le j\le n}}$$

有秩 n. 由定理推出，有 $\mathbb{R}^{n+m}$ 的 θ 邻域到 θ 邻域的一个局部 C^1 同胚 g: $x=g(\tilde{y})$, $\tilde{x}$, $\tilde{y}\in\mathbb{R}^{n+m}$ 的 θ 邻域，使得 $g\circ\mathbf{f}|_{U_1}$ 是正则浸没.

正是这个缘故，把 $\ker\mathbf{f}'(x_0)=\{\theta\}$ 的双裂映射 $\mathbf{f}$, 称为一个局部浸没.

2° 再看 $\mathrm{coker}(A)=\{\theta\}$ 的双裂映射. 记 $\mathscr{X}_1=\ker\mathbf{f}(A)$, $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\oplus\mathscr{X}_2$. 这时 A 是 $\mathscr{X}_2\to\mathscr{Y}$ 的代数与拓扑同构. 考察映射: $\varphi(x_1, x_2)=x_1+A^{-1}\mathbf{f}(x_1+x_2)$, 其中 $x=x_1+x_2$, $x_i\in\mathscr{X}_i$, 则

$$\varphi'(\theta_1, \theta_2)=\begin{pmatrix}id_{\mathscr{X}_1} & 0\\ A^{-1}\mathbf{f}'(\theta) & id_{\mathscr{X}_2}\end{pmatrix}.$$

由反函数定理，有 h 是 $\mathscr{X}_1\oplus\mathscr{X}_2$ 的 θ 邻域的一个局部 C^1 同胚，满足

$$\begin{aligned}(x_1, x_2)&=\phi\circ h(x_1, x_2)\\ &=(x_1, A^{-1}\mathbf{f}\circ h(x_1, x_2)),\end{aligned}$$

即 $A^{-1}\mathbf{f}\circ h=P_{\mathscr{X}_2}$. 总结起来，又有

定理 1.8 设 $\mathbf{f}\in C^1(U, \mathscr{Y})$, $\mathbf{f}(\theta)=\theta$, $\theta\in U$, $\mathbf{f}'(\theta)$ 是双裂的，并且 $\mathrm{coker}(\mathbf{f}'(\theta))=\{\theta\}$. 又设 $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\oplus\mathscr{X}_2$, 其中 $\mathscr{X}_1=\ker(\mathbf{f}'(\theta))$; 则必 $\exists$ 开集 $V_i\subset\mathscr{X}_i$, $i=1, 2$, 以及 h: $V_1\times V_2\to U_0\subset U$ 是一 C^1 同胚($\theta\in U_0$, 开)，使得

$$\mathbf{f}'(\theta)^{-1}\circ\mathbf{f}\circ h|_{V_1\times V_2}\ \text{是到}\ \mathscr{X}_2\ \text{上的投影算子}.$$

在微分几何中，把大空间 $\mathbb{R}^{n+m}$, $m\geq 0$, 投射到小空间 $\mathbb{R}^m$ 的正则映射:

$$\begin{matrix}x=(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}) & \mapsto & \hat{x}=(x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})\\ \cap & & \cap\\ \mathbb{R}^{n+m} & & \mathbb{R}^m\end{matrix}$$

称作正则浸盖(canonical submersion).

在定理 1.8 中，当 $\mathscr{X}=\mathbb{R}^{n+m}$, $\mathscr{Y}=\mathbb{R}^m$ 时，

$$\mathbf{f}(x)=\begin{pmatrix}\mathbf{f}_1(x)\\ \vdots \\ \mathbf{f}_m(x)\end{pmatrix},\ \mathbf{f}'(\theta)=\left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n+m}}$$

有秩 m. 由定理推得，有 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中 θ 的邻域到 θ 的邻域间的一个 C^1 同胚 h: $x=h(y)$, $x, y\in\mathbb{R}^{n+m}$ 的 θ 的邻域，使得 $\mathbf{f}\circ h$ 相当于到 $\mathbb{R}^m$ 的投影，或正则浸盖.

正是这个缘故，我们把 $\operatorname{coker}(\mathbf{f}'(x_0))=\{\theta\}$ 的双裂映射 $\mathbf{f}$，称为一个*局部浸盖*.

总结起来，对于双裂映射 $\mathbf{f}$,

$\mathbf{f}$ 是局部浸没 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{f}'(x_0)$ 是单射 (injective),

即 $\ker\mathbf{f}'(x_0)=\{\theta\}$;

$\mathbf{f}$ 是局部浸盖 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{f}'(x_0)$ 是满射 (surjective),

即 $R(\mathbf{f}'(x_0))=\mathscr{Y}$.

作为隐函数定理的另一个应用. 我们介绍关于约化方程的一个方法——Ляпунов-Schmidt 手续.

设 $\mathbf{f}: \mathscr{X}\times\Lambda \xrightarrow{C^r} \mathscr{Y}$, $r\geq 1$. 其中 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是 Banach 空间，而 Λ 是一个拓扑空间. 求解

$$\mathbf{f}(x;\lambda)=\theta. \tag{1.10}$$

如果我们已知:

$$\mathbf{f}(x_0;\lambda_0)=\theta,$$

$$X_1=\ker\mathbf{f}'_x(x_0;\lambda_0), \text{ 以及 } \mathscr{X}=X_1\oplus X_2,$$

$$Y_1=\operatorname{Rang}(\mathbf{f}'_x(x_0;\lambda_0)) \text{ 是闭的，以及 } \mathscr{Y}=Y_1\oplus Y_2,$$

那么我们可以通过隐函数定理来"降维"，把方程(1.10)的求解问题化归到一个低维方程问题.

记 $P: \mathscr{Y}\to Y_1$, $Q: \mathscr{X}\to X_1$ 都是投影算子. $\forall x\in\mathscr{X}$, 令

$$x_1=Qx,\ x_2=(I-Q)x,$$

则 $\mathbf{f}(x,\lambda)=\theta$ 等价于

$$\begin{cases}P\mathbf{f}(x_1+x_2;\lambda)=\theta,\\ (I-P)\mathbf{f}(x_1+x_2;\lambda)=\theta,\end{cases}$$

由设 $P\mathbf{f}'_{x_2}(x_{1,0}+x_{2,0};\lambda_0)$ 作为 $X_2\to Y_1$ 的映射有有界逆．又有：$P\mathbf{f}(x_{1,0}+x_{2,0};\lambda_0)=P\mathbf{f}(x_0,\lambda_0)=\theta$，所以由隐函数定理，存在 X_1 的 θ 邻域 U_1，Λ 的 λ_0 邻域 W，以及 X_2 的 θ 邻域 U_2 和唯一的 C^p 映射 $\varphi: U_1\times W\to U_2$，满足：

$$P\mathbf{f}(x_1+\varphi(x_1,\lambda);\lambda)=\theta.$$

于是为了求解方程(1.10)，等价地去求解

$$(I-P)\mathbf{f}(x_1+\varphi(x_1,\lambda);\lambda)=\theta. \tag{1.11}$$

这是一个自变量在 $X_1\times\Lambda$ 上，取值于 Y_2 的方程．特别地，当 $\dim X_1=d$，$\dim Y_2=d^*$，$d, d^*<+\infty$ 时，这便是一个带参数 $\lambda\in\Lambda$ 的 d 个变量，d^* 个方程的有穷维问题．历史上，习惯把方程(1.11)称为方程(1.10)的分歧方程，尽管这种约化并不直接与分歧有联系．

1.4 常微分方程初值问题

设 $I\subset\mathbb{R}^1$ 是一个包含 θ 的闭区间．又设 $\phi: I\times U\to\mathscr{X}$ 连续，并一致地对固定的 t，是 $x\in U$ 的局部 Lipschitz 函数；即 $\forall x_0\in U$，存在 $R>0$ 以及 $K=K(x_0,R)>0$，适合

$$\|\phi(t,x)-\phi(t,y)\|\leqslant K\|x-y\|,\quad \forall\, x, y\in B(x_0,R).$$

考察下列常微分方程的初值问题：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\phi(t,x),\ x(0)=x_0\in U. \tag{1.12}$$

关于方程(1.12)的解的存在唯一性以及对初值的连续性的结论和普通数值函数的讨论完全相似．有

定理 1.9 $\exists\alpha>0$，满足 $[-\alpha,\alpha]\subset I$，使方程(1.12)在 $[-\alpha,\alpha]$ 上存在唯一的解 $x(t)$．

证明 化归积分方程：

$$x(t)=x_0+\int_0^t\phi(s,x(s))\mathrm{d}s. \tag{1.13}$$

在空间 $C([-\alpha,\alpha],\mathscr{X})$ 中的球 $\{x(t)\mid\|x(t)-x_0\|\leqslant R\}$ 上．

$$\alpha<\min\left\{\frac{R}{M},\ \frac{1}{K}\right\}$$

(其中 $M=\sup\limits_{t\in I}\|\phi(t,x_0)\|+KR$),应用压缩映象定理.

由于(1.13)中定义的映射对 x_0 是一致压缩的,所以解 $x(t)=x(t;x_0)$ 对初值 x_0 的依赖也是连续的. 更确切地还有如下结论:

$x(t,x_0)$ 在它的定义域上满足:

$$\|x(t,x_0)-x(t,y_0)\|\leqslant\|x_0-y_0\|e^{Kt},$$

只要 $\phi(t,x)$ 满足: $\|\phi(t,x)-\phi(t,y)\|\leqslant K\|x-y\|\ \ \forall x,y\in U$.

这是由下列 Gronwall 不等式导出的:

引理 1.3 设 $w\in C[0,T]$ 是一非负函数, 有常数 $C, K\geqslant0$ 使得

$$w(t)\leqslant C+K\int_0^t w(s)\mathrm{d}s,$$

则
$$w(t)\leqslant Ce^{Kt},\quad \forall t\in[0,T].$$

证明 令 $\phi(t)=C+K\int_0^t w(s)\mathrm{d}s$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-Kt}\phi(t))=e^{-Kt}(Kw-K\phi)\leqslant0,$$

从而 $e^{-Kt}\phi(t)\leqslant\phi(0)=C$, 即得 $w(t)\leqslant\phi(t)\leqslant Ce^{Kt}$.

§2 Banach 流形

分析学中感兴趣的流形大多数是无穷维的. 最常遇到的是 Banach 流形.

2.1 Banach 流形与向量丛

定义 2.1 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间. M 是一个连通的 Hausdorff 空间. 称 M 是装备在 $\mathscr{X}$ 上的一个 Banach C^r 流形, $r\geqslant1$, 是指:

(1) M 上存在一族开覆盖 $\{U_l\}_{l\in\Lambda}$: $U_l\subset M, l\in\Lambda, \bigcup\limits_{l\in\Lambda}U_l=M$, 其中 Λ 是一个指标集.

(2) ∃一族 $\{\varphi_l|U_l\to\varphi_l(U_l)$, 后者是 $\mathscr{X}$ 中的开子集, 并且 φ_l 是双方单射$\}$.

(3) $\varphi_l\varphi_{l'}^{-1}$: $\varphi_{l'}(U_l\cap U_{l'})\to\varphi_l(U_l\cap U_{l'})$ $\forall l, l'\in\Lambda$ 是 C^r 微分同胚.

每一对 (U_l, φ_l) 就称为是一个坐标，若 $x\in M$ 属于 U_l，就称 (U_l, φ_l) 为 x 处的坐标. 而 $\{(U_l, \varphi_l), l\in\Lambda\}$ 称为 M 上的一个坐标系.

定义 2.2 设 M, N 分别是装备在 Banach 空间 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 上的 C^r Banach 流形. 设 $f: M\to N$ 是一个映射. 称它是 C^r(或 C^{r-0})类的，是指：存在 M 上的一个坐标系 $\{(U_l, \varphi_l), l\in\Lambda\}$ 和 N 上的一个坐标系 $\{(V_\alpha, \psi_\alpha), \alpha\in A\}$，使得对任意 $l\in\Lambda$, $\alpha\in A$, 映射

$\psi_\alpha\circ f\circ\varphi_l^{-1}$: $\varphi_l(U_l)\to\psi_\alpha(V_\alpha)$ 是 C^r (或 C^{r-0})的.

注 2.1 设 (U, φ) 是 M 上的一个坐标，即 U 是 M 的一个开子集，φ: $U\to\varphi(U)\subset\mathscr{X}$ 是一个拓扑同构. 称 (U, φ) 与 $\mathscr{X}$ 坐标系 $\{(U_l, \varphi_l), l\in\Lambda\}$ 是相容的，是指 $\varphi_l\circ\varphi^{-1}$ 都是 C^r 微分同胚.

两个坐标系称为是相容的，是指其中之一的任一个坐标与另一个坐标系都是相容的.

易见：坐标系之间的相容关系是等价关系.

Banach 流形 M 是由它上面的 C^r 坐标系的等价类唯一决定的.

注 2.2 定义 2.2 中的 $\{(U_l, \varphi_l)\}$, $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ 可以换成是任意一个坐标系.

命题 2.1 设 M_1, M_2, M_3 都是 C^r 流形，f: $M_1\to M_2$; g: $M_2\to M_3$ 都是 C^r (或 C^{r-0}) 的映射；则 $g\circ f$ 是 $M_1\to M_3$ 的 C^r (或 C^{r-0})的映射.

证明 取坐标系 $\{(U_l, \varphi_l)\,|\,l\in\Lambda\}$ 于 M_1, $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\,|\,\alpha\in A\}$ 于 M_2, $\{(w_\beta, \xi_\beta)\,|\,\beta\in B\}$ 于 M_3, 则 $\forall l\in\Lambda$, $\forall\beta\in B$.

$$\xi_\beta\circ g\circ \mathbf{f}\circ\varphi_l^{-1}=(\xi_\beta g\psi_\alpha^{-1})\circ(\psi_\alpha \mathbf{f}\varphi_l^{-1})$$

是两个 C^r(或 C^{r-0})映射之复合，按锁链法则，它是 C^r(或 C^{r-0})的.

定义 2.3 设 M 是装备在 $\mathscr{X}$ 上的一个 C^r Banach 流形. $N\subset M$ 称为是 M 的一个子流形，如果 $\mathscr{X}$ 有直和分解 $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\oplus\mathscr{X}_2$ 而且 $\forall p\in N$ 有一个与流形结构相容的坐标 (U, φ)，使得

$$\varphi(U\cap N)=(\mathscr{X}_1\times\{w\})\cap\varphi(U),$$

其中 $w\in\mathscr{X}_2$.

几何上直观地说：N 是 M 的一个子流形，如果 $\forall p\in N$，它的邻域 U 在 φ 作用下展平在子空间 $\mathscr{X}_1$ 上.

显然 N 在 M 内是局部闭的. 此外，φ 导出一个双方单射：

$$\psi: N\cap U\to\mathscr{X}_1\cap\varphi(U).$$

并且若令 $\mathfrak{N}=\{l\in\Lambda\mid N\cap U_l\neq\emptyset\}$，则 $\{(U_p,\ \psi_p)\mid p\in\mathfrak{N}\}$ 是 N 上的坐标系.

事实上，显然 $N=\bigcup_{p\in\mathfrak{N}}U_p$，并且 $\psi_p(N\cap U_p)\subset\mathscr{X}_1$ 是开集，又 $\psi_p: N\cap U_p\to\psi_p(N\cap U_p)$ 是双方单射.

为证 $\{(N\cap U_p,\ \psi_p)\mid p\in\mathfrak{N}\}$ 是 N 上的坐标系. 只须再证

$$\psi_p\psi_{p'}^{-1}:\ \psi_{p'}(U_p\cap U_{p'}\cap N)\to\psi_p(U_p\cap U_{p'}\cap N)$$

是 C^r 微分同胚，$\forall p,\ p'\in\mathfrak{N}$.

这是因为有

$$\psi_{p'}(U_p\cap U_{p'}\cap N)\xrightarrow{\ i\ }\varphi_{p'}(U_p\cap U_{p'})\xrightarrow{\varphi_p\varphi_{p'}^{-1}}\varphi_p(U_p\cap U_{p'})$$

$$\xrightarrow{\ P\ }\psi_p(U_p\cap U_{p'}\cap N)$$

$$\psi_p\circ\psi_{p'}^{-1}=P\circ(\varphi_p\circ\varphi_{p'}^{-1})\circ i,$$

其中 i 是 $\mathscr{X}_1\to\mathscr{X}$ 的内射，而 P 是 $\mathscr{X}\to\mathscr{X}_1$ 的投影. 所以 $\psi_p\circ\psi_{p'}^{-1}$ 是 C^r 连续的.

于是 $\{(N\cap U_p,\ \psi_p)\mid p\in\mathfrak{N}\}$ 便导出了子流形 $N\subset M$ 上的一个 Banach 流形结构. 在这个意义下，N 还是一个 Banach 流形.

而且易见，如果 M 是 C^r 的，那么 N 也是 C^r 的.

定义 2.4（向量丛） $\xi=(E,\ \pi,\ M)$ 称为是一个向量丛，是指 E 是一个 Banach 流形，M 是它的一个子流形，$\pi: E\to M$ 是投影，使得 $\forall p\in M$，$E_p=\pi^{-1}(p)$ 是一个拓扑线性空间，其原点 θ 与 p 相合；并且存在 $\{U_l\mid l\in\Lambda\}$ 是 M 的一个开覆盖. 又设 $\forall l\in\Lambda$，给定一个 Banach 空间 E_l 和 C^r 映射

$$\tau_l: \pi^{-1}(U_l)\to U_l\times E_l,$$

使得

(1) τ_l 是一个同构，并且与到 U_l 上的投影 π 交换，即下图交换

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_l) & \xrightarrow{\tau_l} & U_l\times E_l \\ & \searrow^{\pi} \quad U_l \quad \swarrow^{P_l} & \end{array}$$

(2) $\forall p\in U_l$，导出映象

$$\tau_{lp}: \pi^{-1}(p)\to E_l$$

是拓扑线性同构.

(3) $\forall l, l'\in \Lambda$,

$$p\mapsto \tau_{l'p}\tau_{lp}^{-1}$$

是 $U_l\cap U_{l'}\to \mathscr{L}(E_l, E_{l'})$ 的 C^r 连续映射.

最简单的向量丛是平凡丛，它是由一个 Banach 流形 M 与一个固定的 Banach 空间 Y 作乘积得到的流形 $M\times Y$, $\xi=(M\times Y, \pi, M)$，其中

$$\pi(p, y)=p, \ \forall (p, y)\in M\times Y.$$

事实上，这时取开覆盖为 M 自身，而 τ 为恒同映射.

注 2.3 在这个意义上可以说：每个向量丛局部地（在每个 U_l 上）是一个平凡丛．而在整体上它则是由一片片平凡丛通过 C^r 连续映射 $\tau_{lp}\circ\tau_{l'p}^{-1}$ 粘合起来的．我们称 $\{(U_l, \tau_l)|l\subset\Lambda\}$ 为关于 E 的**平凡覆盖**.

注 2.4 若 $\xi=(E, \pi, M)$ 是一个向量丛，M 上有流形结构 $\{(U_l, \varphi_l)|l\in\Lambda\}$；则在 E 上可以赋予流形结构 $\{(\pi^{-1}(U_l), \psi_l)|l\in\Lambda\}$，使得 M 是 E 的一个子流形．问题化归：确定线性子空间 Y 及映射 ψ_l

$$\psi_l: \pi^{-1}(U_l)\to\varphi_l(U_l)\times Y.$$

事实上，不妨设 $\{U_l|l\in\Lambda\}$ 就是定义 2.4 中 M 的开覆盖．而 $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\oplus Y$ 为定义 2.3 中的分解，其中 $\mathscr{X}$ 是装备 E 的 Banach 空间．于是有

$$\mathscr{X}_1 \oplus Y \supset V \xleftarrow{\psi} U \subset \pi^{-1}(U_l) \xrightarrow{\tau_l} U_l \times E_l \xrightarrow{(\varphi_l,\, id)} \varphi_l(U_l) \times E_l$$

由于 ψ, τ_l, 以及(φ_l, id)都是同构,所以有线性拓扑同构

$$L_p: \mathscr{X}_1 \oplus Y \to \mathscr{X}_1 \times E_l,\ \forall p \in U \cap U_l,$$

满足: $L_p|_{\mathscr{X}_1} = id_{\mathscr{X}_1}$. 令 $\bar{L}_p$ 为 L_p 诱导的 $Y \to E_l$ 的线性拓扑同构. 取 $\psi_l = (\varphi_l, \bar{L}_p^{-1}) \circ \tau_l$, 即得

$$\psi_l: \pi^{-1}(U_l) \to \varphi_l(U_l) \times Y.$$

由此可见对于向量丛 $\xi = (E, \pi, M)$, 一切 E_l 都同构于 Y.

注 2.5 在定义 2.4 中, 若已知 M 是一个流形. 那么为确定向量丛, 往往可以不必验证全部条件(1)～(3).

设对于 Banach 流形 M, $\{(U_l, \varphi_l) | l \in \Lambda\}$ 是它的一个坐标系. 又设 $\forall l \in \Lambda$, 有 Banach 空间 E_l 和双射 $\tau_l: \pi^{-1}(U_l) \to U_l \times E_l$, 满足:

$$P_l \tau_l = \pi$$

以及

$\forall l, l' \in \Lambda$, $p \in U_l \cap U_{l'}$, $(\tau_{l'} \tau_l^{-1})_p$ 是线性拓扑同构.

$p \mapsto (\tau_{l'} \tau_l^{-1})_p$ 是 $U_l \cap U_{l'} \to \mathscr{L}(E_l, E_{l'})$ 的 C^r 映射. 则 E 具有唯一的流形结构, 使得(E, π, M)是向量丛, τ_l 是与 π 交换的同构, 而 $\{(U_l, \tau_l) | l \in \Lambda\}$ 是一个平凡覆盖.

事实上, $\tau_{l'} \tau_l^{-1}: (U_l \cap U_{l'}) \times E_l \to (U_l \cap U_{l'}) \times E_{l'}$ 是一个同构. 由坐标系的定义, E 只有唯一的流形结构, 使得 τ_l 是同构. 因为局部地 $\pi = p_l \tau_l$, 所以 π 是 C^r 映射. 在每个纤维 $\pi^{-1}(p)$上, 可以用 τ_{l_p} 由 E_l 上的 Banach 结构决定它的拓扑向量结构, $p \in U_l$. 因为$(\tau_{l'} \tau_l^{-1})$是线性拓扑同构, 所以这样导出的 Banach 空间结构是唯一的.

2.2 切丛与余切丛

附属于一个 C^1 流形 M 的常用的向量丛是它的切丛与余切

丛. 在定义切丛之前,先定义切空间.

设 M 是一个 C^r Banach 流形, 装备在 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上. $\forall p\in M$, 考察三元系 (U, φ, v). 其中 (U, φ) 是 p 点的坐标, 而 $v\in\mathscr{X}$. 我们称两个三元系 (U, φ, v) 与 (V, ψ, w) 是等价的, 如果

$$(\psi\circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))v=w. \tag{2.1}$$

然后, 把一切这种三元系的等价类组成的集合记作 $T_p(M)$, 称为 M 在 p 点的切空间.

利用微分的锁链法则. 易见上面定义的等价性符合等价关系公理.

此外, 对每个固定的坐标 (U, φ), 三元系 (U, φ, v) 的全体显然与 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 同构. 利用等价性定义, 可见若 (V, ψ, w) 与 (U, φ, v) 等价, 则 w 可以通过固定的线性同构 $(\psi\circ\varphi^{-1})'(\varphi(p))$ 由 v 变换得到. 于是对固定的 (V, ψ), (V, ψ, w) 的全体构成与原来的 (U, φ, v) 同构的 Banach 空间. 于是 $T_p(M)$ 可以用任意一个坐标 (U, φ) 为代表得到与 $\mathscr{X}$ 同构的 Banach 空间 $\{(U,\varphi, v)\mid v\in\mathscr{X}\}$.

切空间还有一个等价定义.

设 $I=(-1, 1)$, 称 $\alpha: I\xrightarrow{C^1} M$ 为一曲线. 我们说, α 以 $p\in M$ 为基点. 是指 $\alpha(0)=p$. 两根同基点 p 的曲线 α, β 称为在点 p 相切, 如果 $(\varphi_l\circ\alpha)'(0)=(\varphi_l\circ\beta)'(0)$, 对某坐标 (U_l, φ_l), 其中 $p\in U_l$. 事实上, 只要有一个坐标使 α, β 在 p 相切, 则对一切坐标 $(U_{l'}, \varphi_{l'})$, 只要 $p\in U_{l'}$, 都有 $(\varphi_{l'}\circ\alpha)'(0)=(\varphi_{l'}\circ\beta)'(0)$. 因为

$$(\varphi_{l'}\circ\alpha)'=(\varphi_{l'}\circ\varphi_l^{-1}\circ\varphi_l\circ\alpha)'=(\varphi_{l'}\circ\varphi_l^{-1})'(\varphi_l\circ\alpha)'.$$

把在点 p 处相切的两根同基点 p 的曲线 α, β 规定为是等价的, 记作 $\alpha\sim\beta$. 显然 $\sim$ 是一个等价关系. α 的等价类记作 $[\alpha]_p$. 就称为一个切向量在每个坐标 (U_l, φ_l) 下, $[\alpha]_p$ 有表示 $(\varphi_l\circ\alpha)'(0)$. p 点的一切切向量正好组成 Banach 空间 $\mathscr{X}$. 事实上, $\forall v\in\mathscr{X}$, $\forall$ 坐标 (U_l, φ_l) 取 $\alpha(t)=\varphi_l^{-1}(\varphi_l(p)+vt)$, 则 $\varphi_l\circ\alpha(t)=\varphi_l(p)+vt$, 从而 $(\varphi_l\circ\alpha)'(0)=v$. 这样就通过 $[\alpha]\mapsto(\varphi_l\circ\alpha)'(0)=v$ 得到等价类

$[\alpha]$与三元系$(U_l, \varphi_l, (\varphi_l\circ\alpha)'(0))$的等价类间的1-1对应.

于是记$T_p(M)=\{[\alpha]_p|$在(U_l, φ_l)下,有表示$(\varphi_l\circ\alpha)'(0)\}$,在坐标系$(U_l, \varphi_l)$下,用$(\varphi_l\circ\alpha)'(0)$所在的$\mathscr{X}$空间的Banach结构规定$T_p(M)$的拓扑结构.

令$E=\bigcup\limits_{p\in M}T_p(M)$,规定自然投影

$$\pi: E\to M$$

映$T_p(M)$中一切元素于点p. 并令$T(M)=(E, \pi, M)$. 以下规定坐标系使$T(M)$构成向量丛. 若(U, φ)是M的一个坐标,$\varphi(U)$在$\mathscr{X}$是开的,则由切向量——三元系(U, φ, v)的等价类——的定义,有双方单射

$$\tau_U: \pi^{-1}(U)=T(U)\to U\times\mathscr{X},$$

它与到U上的投影π是交换的,即

$$\begin{array}{ccc}\pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\tau_U} & U\times\mathscr{X}\\ & \searrow^{\pi} & \downarrow P\\ & & U\end{array}$$

此外,若$l, l'\in\Lambda$, (U_l,φ_l), $(U_{l'}, \varphi_{l'})$是两个坐标,记$\varphi_{l'l}=\varphi_{l'}\circ\varphi_l^{-1}$,则令$\tau_{l'l}(p, v)=(\varphi_{l'l}\circ\varphi_l(p), \varphi'_{l'l}\circ\varphi_l(p)v)$,得到

$$\tau_{l'l}: \varphi_l(U_l\cap U_{l'})\times\mathscr{X}\to\varphi_{l'}(U_l\cap U_{l'})\times\mathscr{X}.$$

因为导数$\varphi'_{l'l}\in C^{r-1}$,并在点$\varphi_l(p)$是一个同构,从而按注2.5, $T(M)$是一个C^{r-1}向量丛. 这个向量丛$T(M)$就称为是M的切丛.

用切向量$[\alpha]_p$来表示$T_p(M)$中的元. $T(M)$由$\{(p, [\alpha]_p)\}$组成,在坐标系(U_l, φ_l)下,它对应为$(p, (\varphi_l\circ\alpha)'(0))$. 换一个坐标系$(U_{l'}, \varphi_{l'})$,对应为$(p, (\varphi_{l'}\circ\varphi_l^{-1})'(\varphi_l(p))\cdot(\varphi_l\circ\alpha)'(0))$.

有必要再提一下余切丛的概念. 在Banach流形M上, $\forall p\in M$,把切空间$T_p(M)$换成它的对偶空间$T_p^*(M)$,得到一个新的向量丛(自己验证),称为M上的余切丛,记作$T_p(M)^*$.

设$\phi: M\xrightarrow{C^r}N$. 定义切映射$d\phi: T(M)\to T(N)$如下. 在$M$

的每个坐标(U_ι, φ_ι)，N 的每个坐标$(V_{\iota'}, \psi_{\iota'})$之下，如果 $\phi(U_\iota)\subset V_{\iota'}$，有

$$d\phi: (p, v)\mapsto(\phi(p), (\psi_{\iota'}\circ\phi\circ\varphi_\iota^{-1})'(\varphi_\iota(p))v).$$

切映射 $d\phi$ 的定义是合理的；因为如果(U_s, φ_s)，$(V_{s'}, \psi_{s'})$分别是 M, N 在 p 与 $\phi(p)$ 的另一组坐标，(U_s, φ_s, w)，$(V_{s'}, \psi_{s'}, w')$分别是$(U_\iota, \varphi_\iota, v)$以及$(V_{\iota'}, \psi_{\iota'}, (\psi_{\iota'}\circ\phi\circ\varphi_\iota^{-1})'\varphi_\iota(p)v)$对应的等价三元系，那么因为：

$$w=(\varphi_s\circ\varphi_\iota^{-1})'(\varphi_\iota(p))v,$$

$$\begin{aligned} w'&=(\psi_{s'}\circ\psi_{\iota'}^{-1})'(\psi_{\iota'}(\phi(p)))(\psi_{\iota'}\circ\phi\circ\varphi_\iota^{-1})'(\varphi_\iota(p))v \\ &=(\psi_{s'}\circ\phi\circ\varphi_\iota^{-1})'(\varphi_\iota(p))v \\ &=(\psi_{s'}\circ\phi\circ\varphi_s^{-1})'(\varphi_s(p))w, \end{aligned}$$

即得

$$d\phi: (p, w)\mapsto(\phi(p), (\psi_{s'}\circ\phi\circ\varphi_s^{-1})'(\varphi_s(p))w)$$

由此可见，切映射实际上就是导算子的推广．由定义及导算子的性质，立得：

(1) $d\phi: T(M)\to T(N)$是 C^{r-1} 的．

(2) $d\phi|_{T_p(M)}: T_p(M)\to T_{\phi(p)}(N)$是线性连续的．

(3) 若 $\phi: M\to N$, $\psi: N\to P$, 则

$$d(\psi\circ\phi)=d\psi\circ d\phi.$$

在有的书上，和有的时候，我们也用 ϕ_* 或$T\phi$ 表记 $d\phi$．

对流形之间的映射 ϕ，定义了切映射——导算子概念的推广——以后，我们便有可能引入流形映射的局部浸没与局部浸盖的概念．

定义 2.5　设 M, N 是两个 Banach 微分流形，$\phi: M\xrightarrow{C^1}N$ 是映 M 到 N 的可微映射．设 $p\in M$，称 ϕ 在 p 是双裂的，系指：$(d\phi)_p: T_pM\to T_{\phi(p)}N$ 是双裂的．称 ϕ 在 M 是双裂的，如果它在 M 上每点都是双裂的．

定义 2.6　设 $\phi: M\xrightarrow{C^1}N$ 是 Banach 流形 M 到 N 间的 C^1 可微映射，在$p\in M$ 是双裂的．称 ϕ 在 p 是局部浸没(immersion)，如果 $(d\phi)_p$ 是内射．称 ϕ 在 p 是局部浸盖 (submersion)，如果

$(\mathrm{d}\phi)_p$ 是满射.

利用§1定理1.7与1.8可见.

若 ϕ 在点 p 是局部浸没，则有下图:

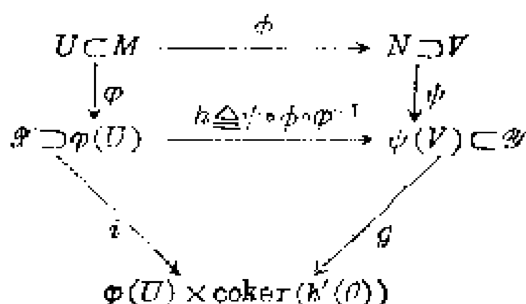


图 2.1

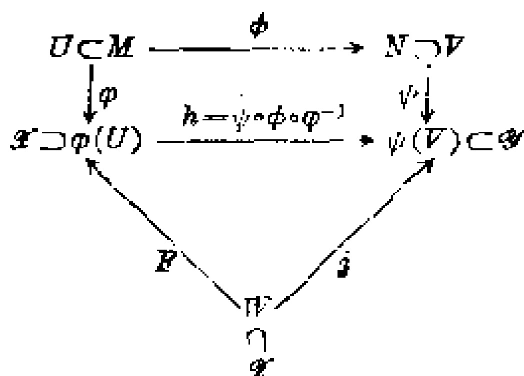


图 2.2

其中 $\mathscr{Y}$ 是 N 所装备的Banach空间，而 i 是

$$\mathscr{X}\to\mathscr{X}\times\mathrm{coker}(h'(\theta))$$

的正则浸没. 即有微分同胚 g，使得 $g\circ h=i$. 但 $(g\circ\psi)\circ\phi\circ\varphi^{-1}=g\circ h$，所以说在微分等价的意义下，$\phi$ 是正则浸没.

同理，若 ϕ 在 p 是局部浸盖. 则有上图:
其中 j 是正则浸盖. 即有微分同胚 F 使得 $h\circ F=j$. 但，

$$h\circ F=\psi\circ\phi\circ(\varphi^{-1}\circ F)=\psi\circ\phi\circ(F^{-1}\circ\varphi)^{-1}.$$

所以说在微分等价的意义下，ϕ 是正则浸盖.

引入局部浸没与浸盖以后，用它们来描写子流形.

定理2.1　设 $\phi: M\xrightarrow{C^r}N$ 是 C^r Banach流形 M, N 间的 r 次可微双裂映射. (1) 设 $q\in N$, $S=\phi^{-1}(q)$. 如果 ϕ 在 S 上每点都是局部浸盖，则 S 是 M 中的一个 C^r 子流形. (2) 设 ϕ 在 M 上每点都是局部浸没，则 $\phi(M)$ 是 N 中的一个子流形.

证明　(1) 利用定理1.8(见图2.2)，有局部微分同胚 F，使得 $\psi(q)=\psi\circ\phi\circ\varphi^{-1}\circ F(x_1+\psi(q))$，这里 F: $V_1\times V_2\to\varphi(U)$, V_1 是 $\ker((\psi\circ\phi\circ\varphi^{-1})'(\theta))$ 的 θ 邻域，而 V_2 是 $\mathscr{Y}$ 的 θ 邻域. 从而

$$(\{\varphi^{-1}\circ F(x_1+\psi(q))\,|\,x_1\in V_1\},\ F^{-1}\circ\varphi)$$

就是 S 的一个坐标系. 从而 S 是一个 C^r 子流形.

(2) 利用定理 1.7(见图 2.1), 有局部微分同胚 g 使得

$$(g\circ\psi)\circ\phi\circ\varphi^{-1}: U\to\mathscr{X}\times\{\theta_2\}$$

的邻域的 C^r 同胚, 其中 θ_2 是 $\operatorname{coker}(h'(\theta))$ 的零点, 而

$$h=\psi\circ\phi\circ\varphi^{-1}.$$

于是由定义 $\phi(M)$ 是一个子流形.

2.3 向量场和微分方程的流

定义 2.7 设 $\mathcal{E}=(E, \pi, M)$ 是一个向量丛. 若 $\xi: M\to E$, 满足 $\pi\circ\xi=id_M$, 则称它为一个截面. ξ 称为是 C^r(或 C^{r-0}) 连续的, 是指作为 Banach 流形间的映射: $M\to E$, 它是 C^r(或 C^{r-0}) 的. $T(M)$ 上的一个截面称为一个向量场. $T(M)^*$ 上的一个截面称为一个余向量场.

设 $\alpha: I=(-1, 1)\xrightarrow{C^p} M$ 是 M 上一条曲线 $(p\leqslant r)$, 则由 $\alpha: I\to M$ 诱导出 $T(I)=I\times\mathbb{R}^1\to T(M)$ 的切映射 α_* 使图

$$\begin{array}{ccc}
T(I) & \xrightarrow{\alpha_*} & T(M) \\
\downarrow & & \downarrow{\pi} \\
I & \xrightarrow{\alpha} & M
\end{array}$$

交换. 记 λ 为 $T(I)$ 的一个截面: $\lambda(t)=1\ \forall t\in I$. 并用 α' 或 $\dfrac{d}{dt}\alpha$ 表示 $\alpha_*\circ\lambda$: $t\mapsto(\alpha(t), (\varphi_i\circ\alpha)'(t))$. 对于 M 的一个坐标 (U_i, φ_i), 若有 $\alpha(t)\in U_i$, 则 $\alpha': I\to T(M)$ 是一条 C^{p-1} 曲线.

定义 2.8 设 ξ 是 M 上的一个向量场. 称 $\alpha: I\to M$ 是 ξ 的从 p 处出发的一条积分曲线或流, 是指

$$\begin{cases}\alpha'(t)=\xi(\alpha(t)), \\ \alpha(0)=p.\end{cases} \tag{2.2}$$

自然要问: 对于给定的 C^{1-0} 向量场 ξ, 又对给定的 $p\in M$ 是否存在流 α 满足(2.2)?

对于 M 的一个坐标 (U_i, φ_i), ξ 有局部表示 $(p, v(p))$, 其中 $v: U_i\to\mathscr{X}$, 在 $\mathscr{X}$ 上求解方程:

$$\begin{cases}(\varphi_l\circ\alpha)'(t)=v(\alpha(t))=v\circ\varphi_l^{-1}((\varphi_l\circ\alpha)(t)),\\(\varphi_l\circ\alpha)(0)=\varphi_l(p).\end{cases}$$

根据§1.4,这解是局部存在唯一的. 又因为对任意坐标$(U_{l'}, \varphi_{l'})$, $p\in U_l\cap U_{l'}$, 有

$$\begin{aligned}(\varphi_{l'}\circ\alpha)'(t)&=(\varphi_{l'}\circ\varphi_l^{-1})'(\varphi_l\circ\alpha)'(t)=(\varphi_{l'}\circ\varphi_l^{-1})'v(\alpha(t))\\&=w(\alpha(t)),\end{aligned}$$

其中$(p, w(\varphi))$是ξ在$(U_{l'}, \varphi_{l'})$中的表示, 所以局部流α存在唯一.

定义 2.9 给定向量场ξ, 以及$p\in M$. 称$\alpha: J\xrightarrow{C^1}M$是自$p$出发的$\xi$的极大流($J\subset\mathbb{R}^1$是开区间), 如果对于任意一条自$p$出发的$\xi$的流$\alpha_1: J_1\xrightarrow{C^1}M$($J_1\subset\mathbb{R}^1$开区间), 都有$J_1\subset J$, 并且$\alpha|_{J_1}=\alpha_1$.

我们要证极大流是存在唯一的. 为此需要

引理 2.1 设$\alpha_i: J_i\to M$, $i=1, 2$是ξ的两条从$p\in M$出发的流, 则$\alpha_1|_{J_1\cap J_2}=\alpha_2|_{J_1\cap J_2}$.

证明 令$J_0=\{t\in J_1\cap J_2 | \alpha_1(t)=\alpha_2(t)\}$将证$J_0$是一个非空的既开又在$J_1\cap J_2$中相对闭的集合, 从而必是$J_1\cap J_2$本身. 其非空是显然的, 因为$0\in J_1\cap J_2$. 它也是相对闭的, 因为$\alpha_1$, α_2都是连续的并且M是Hausdorff空间. 剩下证其开. 设$t_0\in J_0$, 则由局部存在唯一性定理, $\exists\varepsilon>0$, 存在唯一的局部流$\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon)\to M$, 使得$\bar{\alpha}(0)=\alpha_1(t_0)=\alpha_2(t_0)$. 取$\varepsilon$足够小, 以致$(-\varepsilon, \varepsilon)\subset J_1\cap J_2$. 则$t\mapsto\alpha_i(t+t_0)$, $i=1, 2$都是$(-\varepsilon, \varepsilon)$上的局部流. 并从$\bar{\alpha}(0)$出发. 利用局部唯一性, 得到: $\alpha_1(t)=\alpha_2(t)$当$t\in(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, 即$(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\subset J_0$. 所以$J_0$必是开的.

定理 2.2 设$p\in M$, ξ是一个C^{1-0}向量场. 则必存在从p出发的极大流. 并且这极大流还是唯一的.

证明 设$\alpha_l: J_l\to M$是任意一条自p出发的ξ的流. 令$J=\bigcup_l J_l$, 其中l跑遍一切可能的流, 并令$\alpha: J\to M$, 使得$\alpha|_{J_l}=\alpha_l$. 按引理2.1, 这个α的定义是合理的. 由定义, 这流又是极大的.

为证其唯一，设 $\alpha^*: J^* \to M$ 是另一个极大流，则由极大流定义必有 $J^* = J$，并且 $\alpha = \alpha^*$.

于是由定理可见 $\forall p \in M, \exists t^-(p) < 0 < t^+(p)$ 以及 $\alpha: (t^-(p), t^+(p)) \to M$，满足：

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \xi(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = p. \end{cases}$$

如果 $f: M \to \mathbb{R}^1$，则因 $T\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$，所以 $\mathrm{d}f(p): T_p(M) \to \mathbb{R}^1$，或者换句话说，$\mathrm{d}f(p) \in T_p^*(M)$，即 f 的切映射导出余切丛中的一个截面，亦即一个余切向量场.

2.4 Finsler 结构

设 $\xi = (E, \pi, M)$ 是一个(Banach)向量丛，$\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}^1_+$，称为是 ξ 上的一个 Finsler 结构，是指：

(1) $\|\cdot\|$ 是连续的，

(2) $\forall p \in M$，$\|\cdot\|_p \triangleq \|\cdot\| |_{E_p}$ 是 E_p 上的一个等价模.

(3) $\forall p_0 \in M$，对于 p_0 在 M 上的任意使得 E 在上可以平凡化的邻域 U，即，$E|_U = \pi^{-1}(U) \approx U \times E_{p_0}$；对任意 $k > 1$，有 p_0 的一个 M 邻域 $V \subset U$，使得

$$\frac{1}{k}\|\cdot\|_p \leqslant \|\cdot\|_{p_0} \leqslant k\|\cdot\|_p, \quad \forall p \in V.$$

由定义，在平凡丛 $E = U \times Y$ 上有一个自然的 Finsler 结构：设 $\|\cdot\|_Y$ 是 Y 上的模，定义

$$\|(p, y)\| = \|y\|_Y,$$

就是一个 Finsler 结构.

我们想把平凡丛上的 Finsler 结构粘合起来，得到向量丛上的 Finsler 结构. 这当然要求这个丛的底 M 具有一定的限制，例如说它是仿紧的.

先引进：

引理 2.2 设 $\xi = (E, \pi, M)$ 是一个向量丛. $\{O_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 M 的一个开覆盖，$\|\cdot\|^\alpha$ 是 $E|_{O_\alpha}$ 上的一个 Finsler 结构，而 $\{\varphi_\beta|$

$\beta\in B\}$ 是 M 的一个局部有限的单位分解，适合 $\operatorname{supp}\varphi_\beta\subset O_{\alpha(\beta)}$. 则 $\sum\limits_{\beta\in B}(\varphi_\beta\circ\pi)\cdot\|\cdot\|^{\alpha(\beta)}$ 便是 E 上的一个 Finsler 结构.

证明 $\forall p\in M$, 仅有有穷个 β 使得 $\varphi_\beta(p)\neq 0$, 而且

$$\|x\|_p^{\alpha(\beta)}=\|(p,x)\|^{\alpha(\beta)}$$

是模；所以有

$$\|x\|_p:=\sum_{\beta\in B}(\varphi_\beta\circ\pi)\|(p,x)\|^{\alpha(\beta)}=\sum\varphi_\beta(p)\|x\|_p^{\alpha(\beta)}$$

也是模，并且是 E_p 上的等价模.

再证：$\|x\|_p$ 对 p 的连续性. 设 $p_0\in M$, $k>1$. 按定义，$\exists p_0$ 的一个邻域 U, 使得只有有穷多个 $\{\beta_i\}_1^n$ 使得 $\varphi_\beta(p)\equiv 0$, $\forall\beta\notin\{\beta_i\}_1^n$, $\forall p\in U$, 又由于 $\|\cdot\|^\alpha$ 是 Finsler 构造. 所以可以取 $V\subset U$ 是 p_0 的邻域，使得

$$\sqrt{k}^{-1}\|x\|_p^{\alpha(\beta_i)}\leqslant\|x\|_{p_0}^{\alpha(\beta_i)}\leqslant\sqrt{k}\|x\|_p^{\alpha(\beta_i)},\ \forall p\in U,\ i=1,2,\cdots,n,$$

$$\sqrt{k}^{-1}\varphi_{\beta_i}(p)\leqslant\varphi_{\beta_i}(p_0)\leqslant\sqrt{k}\varphi_{\beta_i}(p),\ \forall p\in U,\ i=1,2,\cdots,n,$$

即得：
$$k^{-1}\|x\|_p\leqslant\|x\|_{p_0}\leqslant k\|x\|_p,\ \forall p\in U.$$

定理 2.3 设 $\xi=(E,\pi,M)$ 是一个向量丛，M 是一个仿紧的 Banach 流形；则 ξ 上有一个 Finsler 结构.

证明 取 E 的一个平凡覆盖 $\{(U_l,\tau_l)\mid l\in\Lambda\}$. 在每个 $\pi^{-1}(U_l)$ 上，按自然方式定义 Finsler 结构. 又因为 M 是仿紧的，$\{U_l\mid l\in\Lambda\}$ 是 M 的一个开覆盖；所以有局部有限加细覆盖和对应的单位分解. 应用引理 2.2, 立得 E 上的一个 Finsler 结构.

定义 2.10 一个 C^1 Banach 流形 M, 连同它的切丛 $T(M)$ 上的一个 Finsler 结构，称为一个 Finsler 流形.

按定理 2.3 及定义 2.10, 可见：

(1) 每个仿紧的 Banach 流形，必可赋予一个 Finsler 结构. 使之成为 Finsler 流形.

(2) 设 M 是一个 Finsler 流形，具有 Finsler 结构 $\|\cdot\|$；则在余切丛 $T(M)^*$ 上，定义

$$\|(p,x^*)\|=\sup\{\langle x^*,x\rangle\mid\|x\|_p\leqslant 1,\ x\in T_p(M)\},$$

其中 $x^*\in T_p(M)^*$；这便是 $T(M)^*$ 上的一个 Finsler 结构.

特别地，若 $f: M \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^1$，其中 M 是一个仿紧的 Banach 流形，则 $\|\mathrm{d}f(p)\|$ 对一切 $p\in M$ 有定义，并且

$p\mapsto\|\mathrm{d}f(p)\|$ 是 $M\to\mathbb{R}^1_+$ 的连续函数.

以下再考察 Finsler 流形的可度量化问题. 也就是说，在 Finsler 流形上要引入距离.

设 M 是一个 Finsler 流形，$\sigma: J=(0, 1)\to M$ 是一条 C^1 曲线，定义

$$l(\sigma)=\int_0^1\|\sigma'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

为 σ 的长度. 设 $u, v\in M$，并在 M 的同一个分量上，那么定义

$$\rho(u, v)=\inf_{\sigma}\{l(\sigma)\,|\,\sigma(0)=u,\ \sigma(1)=v\}. \tag{2.3}$$

显然
$$\rho(u, v)=\rho(v, u),$$
$$\rho(u, w)\leqslant\rho(u, v)+\rho(v, w)\quad \forall u, v, w\in M,$$
$$\rho(u, u)=0.$$

为了验证 $\rho(u, v)$ 是 M 上的距离. 需要

引理 2.3 设 M 是一个正则 Banach 流形，(U, ϕ) 是其上的一个坐标. 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathscr{X}$ 上的一个模，又设 $u_0\in U$，$r>0$，令

$$B(u_0, r)=\{u\in U\,|\,\|\phi(u)-\phi(u_0)\|\leqslant r\},$$
$$\mathring{B}(u_0, r)=\{u\in U\,|\,\|\phi(u)-\phi(u_0)\|<r\},$$
$$S(u_0, r)=\{u\in U\,|\,\|\phi(u)-\phi(u_0)\|=r\}.$$

则当 r 足够小时，$B(u_0, r)$ 是 u_0 在 M 中的一个闭邻域，$\mathring{B}(u_0, r)$ 是它关于 M 的内点，而 $S(u_0, r)$ 是它关于 M 的边界. 对这样的 r，$S(x_0, r)$ 分离 $\mathring{B}(u_0, r)$ 与 $M\setminus B(u_0, r)$. 特别地，若 $\sigma: J\to M$ 在 M 中是连续的路径，$\sigma(0)=u_0$ 并且 $\sigma(J)\cap(M\setminus\mathring{B}(u_0, r))\neq\emptyset$，则必有 $c\in J$ 使得 $\sigma(c)\in S(u_0, r)$，以及 $\sigma([0, c))\subset\mathring{B}(u_0, r)$.

证明 因为 M 是正则的. 所以可以选择 u_0 在 M 中的一个闭邻域 $V\subset U$. 又因为 $\phi: U\to\phi(U)\subset\mathscr{X}$ 是同胚，所以取 $r>0$ 足够小，$\mathscr{O}=\{x\in\mathscr{X}\,|\,\|x-\phi(u_0)\|\leqslant r\}$ 是 $\phi(u_0)$ 在 $\mathscr{X}$ 中的一个闭

邻域，使得 $\mathscr{O}\subset\phi(V)$．则 $B(u_0, r)=\phi^{-1}(\mathscr{O})\subset V$．因为 $B(u_0, r)$ 是 u_0 在 V 中的闭邻域，而 V 在 M 中又是闭的，所以 $B(u_0, r)$ 在 M 中是 u_0 的一个闭邻域．又因为 ϕ 是同胚，所以 $\mathring{B}(u_0, r)$ 是 $B(u_0, r)$ 相对于 U 的内点，而 U 在 M 中是开的，于是它关于 M 还是 $B(u_0, r)$ 的内点．一个闭集的边界是相对于包含它的任意开集的边界．再由 ϕ 是同胚，推得 $B(u_0, r)$ 的边界是 $S(u_0, r)$．

因为 $\mathring{B}(u_0, r)$ 与 $M\backslash B(u_0, r)$ 是不相交的开集．其余集为 $S(u_0, r)$，所以它们由 $S(u_0, r)$ 分离．对给定的 σ，$\sigma^{-1}(M\backslash S(u_0, r))$ 是 J 中的开集，从而是不相交的开区间，其边界点包含在 J 的补子集 $\sigma^{-1}(S(u_0, r))$ 上．设 $[0, c)$ 是包含 0 的这种开区间，则 $\sigma(c)\in S(u_0, r)$ 并且作为 $M\backslash S(u_0, r)$ 中包含 $\sigma(0)=u_0\in\mathring{B}(u_0, r)$ 的连通集，$\sigma([0, c))$ 必整个地落在 $\mathring{B}(u_0, r)$ 内．

现在来证明

定理 2.4 设 M 是一个 Finsler 流形．$\rho(u, v)$ 定义如 (2.3)，则 ρ 是 M 上的一个距离，并且它导出的拓扑与 M 上的原有拓扑是一致的．

证明 1° 要证 ρ 是距离，只需再证

$$\rho(u, v)>0 \quad 当 \quad u\neq v.$$

给定 $u_0\in M$，取它的一个坐标 (U, ϕ)，$\phi: U\to T_{u_0}(M)$．再按引理 2.3 取 $r>0$．设

$$\phi(U)=\{x\in T_{u_0}(M)\mid \|x\|<r\}.$$

根据 Finsler 结构的定义，以及 $\mathrm{d}\phi(u)$ 是 $T_u(M)\to T_{u_0}(M)$ 的线性同胚．对某 $k>1$，有

$$\frac{1}{k}\|\cdot\|_{u_0}\leqslant\|\cdot\|_u\leqslant k\|\cdot\|_{u_0} \quad \forall u\in U.$$

若 $\sigma: J\xrightarrow{C^1}U$，则

$$l(\sigma)=\int_0^1\|\sigma'\|_{\sigma(t)}\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{k}\int_0^1\|(\phi\circ\sigma)'(t)\|_{u_0}\mathrm{d}t$$
$$\geqslant\frac{1}{k}\left\|\int_0^1(\phi\circ\sigma)'(t)\mathrm{d}t\right\|_{u_0}$$

$$\geqslant\frac{1}{k}\|(\phi\circ\sigma)(1)-(\phi\circ\sigma)(0)\|_{u_0}.$$

如果 $\sigma(0)=u_0$ 且 $\sigma(J)\not\subset U$, 则由引理 2.3, $\exists c\in J$ 使得

$$\|\phi\circ\sigma(c)\|=r,$$

从而

$$l(\sigma)\geqslant l(\sigma|_{[0,c]})\geqslant\frac{1}{k}\|\phi\circ\sigma(c)\|=\frac{r}{k}.$$

如今对任意一条连接 u, v 的 C^1 曲线 σ,

$$l(\sigma)\geqslant\begin{cases}\dfrac{r}{k} & \text{当 } \sigma(J)\not\subset U,\\ \dfrac{1}{k}\|\phi(v)\|_{u_0} & \text{当 } \sigma(J)\subset U.\end{cases}$$

从而有 $\rho(u_0, v)\geqslant\frac{1}{k}\min\{r, \|\phi(v)\|_{u_0}\}>0$ 当 $v\neq u_0$.

2° 再证 ρ 导出的拓扑与 M 上的原有拓扑一致. 若 $\rho(u_0, v_n)\to 0$, 则 $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\rho(u_0, v_n)<\frac{r}{k},$$

从而 $v_n\in U$ 以及 $\|\phi(v_n)\|_{u_0}\leqslant k\rho(u_0, v_n)$; 从而 $\|\phi(v_n)\|_{u_0}\to 0$. 这蕴含了 $v_n\to u_0(U)$, 亦即 $v_n\to u_0(M)$.

反之, 若 $v_n\to u_0(M)$, 则 $v_n\in U$, 当 $n>N$. 定义 $\sigma_n: J\xrightarrow{C^1}U$, $\sigma_n(0)=u_0$, $\sigma_n(1)=v_n$ 如下:

$$\sigma_n(t)=\phi^{-1}(t\phi(v_n)).$$

则

$$\begin{aligned}\rho(u_0, v_n)\leqslant l(\sigma_n)&=\int_0^1\|\sigma_n'(t)\|_{\sigma_n(t)}\,dt\\&=\int_0^1\|[\phi\circ\sigma_n]'(t)\|_{t\phi(v_n)}\,dt\\&=\int_0^1\|\phi(v_n)\|_{t\phi(v_n)}\,dt\\&\leqslant k\int_0^1\|\phi(v_n)\|_{u_0}dt\\&=k\|\phi(v_n)\|_{u_0}\to 0,\quad \text{当 } n\to\infty.\end{aligned}$$

即得 $\rho(u_0, v_n)\to 0$.

推论 2.1 任意仿紧的 Banach 流形必是可度量化的.

§3 横截与横截定理

设 M^n, Z^k 是两个 C^1 流形, $\mathbf{f}$: $M^n \to Z^k$ 是一个 C^1 映射, 这里 n, k 分别表示流形 M 与 Z 的维数. 问对于 Z^k 的一个子流形 W, 在什么条件下, $\mathbf{f}^{-1}(W)$还是 M^n 的子流形?

3.1 横截概念

为了回答这个问题,我们采用 W 的局部坐标. 设 W 是 Z^k 的 l 维子流形, $\forall w_0 \in W$, 有 Z^k 的坐标 (U, g), 使得 $w_0 \in U$, $g: U \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^k$, 满足:

$$g(U \cap W) = g(U) \cap (\mathbb{R}^l \times \{\theta\}),\ \theta \in \mathbb{R}^{k-l}.$$

令 $\hat{g} = Pg$, 其中 P 是 $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-l}$ 的正交投影. 便有

$$U \cap W = \hat{g}^{-1}(\theta).$$

观察下图: $$M^n \xrightarrow{\mathbf{f}} Z^k \supset W \xrightarrow{\hat{g}} \mathbb{R}^{k-l},$$

可见 $$\mathbf{f}^{-1}(U \cap W) = (\hat{g} \circ \mathbf{f})^{-1}(\theta).$$

由隐函数定理, 为了 $\mathbf{f}^{-1}(W)$ 是子流形, 只需 $\mathrm{d}(\hat{g} \circ \mathbf{f})_x$ 是在上的, $\forall x \in \mathbf{f}^{-1}(W \cap U)$. 但

$$\mathrm{d}(\hat{g} \circ \mathbf{f})_x = \mathrm{d}\hat{g}_{w_0} \circ \mathrm{d}\mathbf{f}_{x_0},\quad w_0 = \mathbf{f}(x_0),$$

如今 $\mathrm{d}\hat{g}_{w_0}$ 是在上的, 且有 $\ker(\mathrm{d}\hat{g}_{w_0}) = T_{w_0}(W)$. 所以为使 $\mathrm{d}(\hat{g} \circ f)_x$ 在上, 只需

$$\operatorname{Im} \mathrm{d}\mathbf{f}_{x_0} + T_{w_0}(W) = T_{w_0}(Z^k). \tag{3.1}$$

这把我们引向

定义 3.1 设 M, Z 是 C^1 流形, f: $M \to Z$. $W \subset Z$ 是一个子流形. $x_0 \in \mathbf{f}^{-1}(W)$. 称 $\mathbf{f}$ *在* x_0 *点横截于* W, 记作 $\mathbf{f} \pitchfork W$ 于 x_0, 是指

$$\operatorname{Im}(\mathrm{d}\mathbf{f}_{x_0}) + T\mathbf{f}_{(x_0)}(W) = T\mathbf{f}_{(x_0)}(Z).$$

如果 $\mathbf{f} \pitchfork W$ 于每点 $x \in f^{-1}(W)$, 则称 $\mathbf{f}$ 与 W 横截, 记作 $\mathbf{f} \pitchfork W$.

由上述分析立得

定理3.1 若 W 是 Z^k 的一个子流形, $\mathbf{f}: M^n\to Z^k$ 是一个 C^1 映射,满足 $\mathbf{f}\pitchfork W$; 则 $\mathbf{f}^{-1}(W)$是 M 的一个子流形,且

$$\operatorname{codim} W=\operatorname{codim}\mathbf{f}^{-1}(W)$$

对于横截,可以作小扰动,保持稳定:

定理3.2 设 M^n 是一个紧 C^1 流形, Z^k 是另一个 C^1 流形,有子流形 W. 设 $\mathbf{f}$, $h: M^n\to Z^k$ 是 C^1 映射,并且 $\mathbf{f}\pitchfork W$; 则 $\exists\varepsilon_0>0$, 当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\mathbf{f}+\varepsilon h\pitchfork W$.

证明 由定义及定理3.1之证, $\forall w_0\in W$ 存在 Z^k 的局部坐标(U, g), $w_0\in U\cap W$, 使得 $d(\hat{g}\circ\mathbf{f})_{x_0}$ 是满射, 即局部地, $\forall(x_0, w_0)$, $\mathbf{f}(x_0)=w_0$, $(g\circ\mathbf{f})'(x_0)$的秩为 $k-l$, 这里 $(k-l)$是 W 的维数. 于是$(g\circ\mathbf{f})'(x_0)$有一个$(k-l)$子方阵, 其行列式$\neq 0$; 由连续性, 存在着 x_0 的一个邻域 U_{x_0}, 正数 ε_{x_0}, 以及 $\mathbf{f}$ 的一个与 U_{x_0} 有关的邻域 V, 使得 $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_{x_0})$, $\forall x\in U_{x_0}$, 当 $\mathbf{f}+\varepsilon h\in V$ 时, $(g\circ(\mathbf{f}+\varepsilon h))'(x)$的对应的$(k-l)$子方阵的行列式$\neq 0$. 如此得到 M^n 的一族开子集 $\{U_{x_0}|x_0\in\mathbf{f}^{-1}(W)\}$, 它覆盖了子集$(g\circ(\mathbf{f}+\varepsilon h))^{-1}(\theta)=(\mathbf{f}+\varepsilon h)^{-1}(W)$. 因为 M^n 是紧的, 所以有有穷个 $\{U_i\}_1^m$ 覆盖了$(\mathbf{f}+\varepsilon h)^{-1}(W)$. 令 $\hat{V}=\bigcap_{i=1}^m V_i$, $\hat{\varepsilon}=\min\{\varepsilon_i|1\leqslant i\leqslant m\}$; 则 $\exists\varepsilon_0\in(0,\hat{\varepsilon})$, 当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\mathbf{f}+\varepsilon h\in\hat{V}$ 以及 $x\in(\mathbf{f}+\varepsilon h)^{-1}(W)$ 时, $(g\circ(\mathbf{f}+\varepsilon h))'(x)$ 的对应的 $(k-l)$ 子方阵的行列式 $\neq 0$. 于是 $g\circ(\mathbf{f}+\varepsilon h)$是一个浸盖,即得

$$T_{w_0}(W)+\operatorname{Im}(d(\mathbf{f}+\varepsilon h)(x_0))=T_{w_0}(Z^k),$$

$\forall(x_0, w_0)$, 其中 $(\mathbf{f}+\varepsilon h)(x_0)=w_0$.

3.2 Sard 定理

设 X, Z 是两个 C^1 Banach 流形, $\mathbf{f}: X\to Z$ 是 C^1 映射, 下述概念是本书主要关心的对象.

定义3.2 称 $z\in Z$ 为$\mathbf{f}$的正则值,如果 $\mathbf{f}\pitchfork\{z\}$; 也就是说: 或者 $\mathbf{f}^{-1}(z)=\emptyset$, 或者$d\mathbf{f}_x: T_x(X)\to T_{f(x)}(Z)$是在上的,$\forall x\in\mathbf{f}^{-1}(z)$.

称 $x\in X$ 是 $\mathbf{f}$ 的正则点，如果 $d\mathbf{f}_x: T_x(X)\to T\mathbf{f}_{(x)}(Z)$ 是在上的.

不是正则值的值称为临界值，不是正则点的点称为临界点.

下述 Sard 定理深刻地揭示了临界值集合是相当"小"的. 它在临界点理论中十分重要.

定理 3.3(Sard) 设 X^n, Z^k 都是 C^1 流形，$\mathbf{f}\in C^r(X^n, Z^k)$；则当 $r>\max(0, n-k)$时，$\mathbf{f}$ 的临界值集是一个零测集.

这个定理的证明完全是测度论的，又与后面用到的方法没有多大联系，兹从略. 读者请参看 Milnor[Mi, 2].

为了推广 Sard 定理到无穷维空间，我们要

定义 3.3 设 X, Y 是 Banach 空间，U 是 X 的一个连通开子集. 又设 $\mathbf{f}\in C^1(U, Y)$，称它是一个 Fredholm 映射，是指：$\forall x\in U$, $\mathbf{f}'(x)\in\mathscr{L}(\mathscr{X}, Y)$都是 Fredholm 算子. 称

$$\operatorname{ind}\mathbf{f}\triangleq\operatorname{ind}\mathbf{f}'(x)=\dim\ker\mathbf{f}'(x)-\dim\operatorname{coker}\mathbf{f}'(x)$$

为 $\mathbf{f}$ 的指数.

注 3.1 这样定义的指标 $\operatorname{ind}\mathbf{f}$ 是有意义的，即，不依赖于 $x\in U$ 的特殊选择. 这是因为 $\operatorname{ind}\mathbf{f}: U\to\mathbb{Z}$ 连续(参看关肇直、张恭庆、冯德兴[KCF1])，而 U 是连通的.

定理 3.4 设 $\mathbf{f}\in C^1(U, Y)$是一个 Fredholm 映射，则它的临界点集必是闭的.

证明 因为 $x\mapsto\dim\ker\mathbf{f}'(x)$是上半连续的，而

$$\dim\operatorname{coker}\mathbf{f}'(x)=\dim\ker\mathbf{f}'(x)-\operatorname{ind}\mathbf{f},$$

所以它也是上半连续的. 记 S 为 f 的临界点集，则

$$\begin{aligned}S&=\{x\in U\,|\,\mathbf{f}'(x)\text{不是在上的}\}\\&=\{x\in U\,|\,\dim\operatorname{coker}\mathbf{f}'(x)\geqslant 1\}\end{aligned}$$

必是闭集.

定理 3.5 设 $\mathbf{f}\in C^1(U, Y)$是一个 Fredholm 映射，则 $\mathbf{f}$ 是局部闭的，即 $\forall x_0\in U$, $\exists x_0$ 的邻域 N，使得 $\mathbf{f}|_N$ 是闭的.

证明 因为 $\mathbf{f}'(x_0)$是 Fredholm 算子，所以有直和分解：$\mathscr{X}=\ker\mathbf{f}'(x_0)\oplus\mathscr{X}_1$. 记 Q 为 $Y\to\operatorname{Im}\mathbf{f}'(x_0)$ 的投影，则由隐函数定

理，$\exists x_0$ 的一个邻域 $U_0\times V_0\subset\ker \mathbf{f}'(x_0)\times\mathscr{X}_1$，$\mathbf{f}(x_0)$的一个邻域 $W\subset\mathrm{Im}\,\mathbf{f}'(x_0)$，以及 $h: U_0\times W\to V_0$ 连续可微，使得

$$Qf(u+h(u,y'))=y'\quad\forall(u,y')\in U_0\times W,$$

并且 $\forall u_0\in U_0$，$h(u_0,\cdot): W\to V_0$ 是一个微分同胚. 又因为 U_0 是有穷维的，所以不妨取它是紧的.

为证 $\mathbf{f}|_{U_0\times V_0}$ 是闭的. 设 $x_n=u_n+v_n\in U_0\times V_0$，$\mathbf{f}(x_n)=y_n\to y$. 只要证明 x_n 有收敛子列就够了. 事实上，因为 u_n 有收敛子列，$v_n=h(u_n,y_n)$，所以 v_n 也有收敛子列，即得 x_n 有收敛子列.

定理 3.6(Sard-Smale) 设 $\mathscr{X}$ 是一个可分的 Banach 空间，U 是 $\mathscr{X}$ 的一个连通开集，Y 是一个 Banach 空间. 又设 $\mathbf{f}\in C^q(U,Y)$是一个 Fredholm 映射，$q>\max\{0,\mathrm{ind}\,\mathbf{f}\}$；则 $\mathbf{f}$ 的临界值集是第一纲集.

证明 因为第一纲集的可数并集还是第一纲的，而 U 又是可分的. 所以只须证明：$\forall x_0\in U$，$\exists x_0$ 的邻域 $U_1\subset U$，使得 $\mathbf{f}|_{U_1}$ 上的临界值集是第一纲集就够了. 即 $\mathbf{f}|_{U_1}$ 的正则值集 $R(\mathbf{f},U_1)$ 的余集是第一纲的. 继续定理 3.5，取 $U_1=U_0\times V_0$，令 $H: U_0\times W\to U_0\times V_0$ 为

$$H:(u_0,y')\mapsto(u_0,h(u_0,y')),$$

则 H 是一个微分同胚，并且满足

$$Q\mathbf{f}\circ H(u,y')=y'.$$

再令 $\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{f}\circ H$，则

$$R(\mathbf{f},U_0\times V_0)=R(\tilde{\mathbf{f}},U_0\times W).$$

又因为 $Qd\tilde{\mathbf{f}}|_W=id_W$；所以 $\forall y'\in W$，

$$(x',y')\in R(\tilde{\mathbf{f}},U_0\times W)\Leftrightarrow x'\in R((I-Q)\tilde{\mathbf{f}}(\cdot,y'),U_0).$$

然而 $$q>\mathrm{ind}\,\mathbf{f}'(x_0)=\dim\ker\mathbf{f}'(x_0)-\dim\mathrm{coker}\,\mathbf{f}'(x_0)$$
$$=\dim U_0-\dim\mathrm{coker}\,\mathbf{f}'(x_0).$$

现在应用 Sard 定理. $R((I-Q)\tilde{\mathbf{f}}(\cdot,y'),U_0)$ 的余集将是零测集，又由定理 3.4 与定理 3.5，所以还是闭集，从而是疏集. 这便证明了 $R(\mathbf{f},U_0\times V_0)$ 的余集也是疏集.

3.3 横截定理

定理 3.7(横截定理) 设 X^n, S, Z^k 都是 C^1 有穷维流形. $F: X\times S\to Z$ 是一个 C^r 映射, $r>\max(0, n-k)$. 又设 $W\subset Z$ 是一个子流形, $F\pitchfork W$. 则对几乎所有的 $s\in S$, $\mathbf{f}_s=F(\cdot, s): X\to Z$ 都有 $\mathbf{f}_s\pitchfork W$.

证明 令 $V=F^{-1}(W)$, 并考察映射

$$V\xrightarrow{\ l\ }X\times S\xrightarrow{\ \pi\ }S,$$

其中 l 是内射, π 是投影: $(x, s)\mapsto s$.

1° 若 s 是 $\pi\circ l$ 的正则值, 要证 $\mathbf{f}_s\pitchfork W$.

设 $z=\mathbf{f}_s(x)$, $z\in W$; 由 $F(s, x)=\mathbf{f}_s(x)=z$, 且 $F\pitchfork W$ 推得:

$$\operatorname{Im}(\mathrm{d}F(x, s))+T_z(W)=T_z(Z). \tag{3.3}$$

要证:

$$\operatorname{Im}(\mathrm{d}\,\mathbf{f}_s(x))+T_z(W)=T_z(Z). \tag{3.4}$$

(3.3) 意味着: $\forall a\in T_z(Z)$, $\exists(\alpha, \beta)\in T_{(x,s)}(X\times S)=T_x(X)\times T_s(S)$, 使得

$$a-(\mathrm{d}_x F\cdot\alpha+\mathrm{d}_s F\beta)\in T_z(W). \tag{3.5}$$

(3.4) 意味着: $\exists v\in T_x(X)$, 使得

$$a-(\mathrm{d}_x F v)\in T_z(W). \tag{3.6}$$

因此 当 $\beta=0$ 时, 取 $v=\alpha$ 即可.

当 $\beta\neq 0$ 时, 因为 π 是投影, 所以

$$\mathrm{d}\pi_{(x,s)}: T_x(X)\times T_s(S)\to T_s(S),$$

正是到 $T_s(S)$ 上的投影, 而 s 的正则性意味着

$$\mathrm{d}\pi(x, s): T_{(x,s)}(V)\to T_s(S)\ 在上;$$

于是有形式为 (u, β) 的向量在 $T_{(x,s)}(V)$ 内. 如今 $F: V\to W$, 所以

$$\mathrm{d}F(x, s)(u, \beta)\in T_z(W).$$

令 $v=\alpha-u$, 则有

$$\begin{aligned}\mathbf{d f}_s(v)-a&=\mathrm{d}F(x, s)[(\alpha, \beta)-(u, \beta)]-a\\&=[\mathrm{d}_xF(x, s)\alpha+\mathrm{d}_sF(x, s)\beta]-a\\&\quad-\mathrm{d}F(x, s)(u, \beta)\in T_z(W).\end{aligned}$$

2° 由 Sard 定理，几乎所有的 $s\in S$ 都是 $\pi\circ l$ 的正则值。

§4 拓 扑 度

拓扑度的概念起源于用代数拓扑方法研究不动点．它的早年陈述与讨论多借助于代数拓扑的方法．然而由于拓扑度在分析学中的应用愈来愈广泛，为便于分析学者掌握这一工具，许多作者作了不少努力，将其整个理论重新建立在分析学的基础上．在这方面应当提到的有 M. Nagumo (1951) [Na. 1]，E. Heinz (1959) [He. 1] J. T. Schwartz (1969) [Sch. 1] 与 L. Nirenberg (1974) [Nir. 1]．经过许多讲义和书的整理，现在这个工具已经变得非常容易掌握了．在这一节，我们将采用分析方法叙述，力求以极小的篇幅介绍出我们后面所需要的准备知识，除给出 Brouwer 度和 Leray-Schauder 度的定义和主要性质而外，我们特别指出解析映射的度的算法．这在第三章中要用到．我们还要指出：度的分析陈述不仅有其教学上的价值．读者在后面的应用中将会发现，它与 Sard 定理结合起来实际上提供了在一些情况下度的计算技巧．

4.1 Brouwer 度的定义

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界开集，$\mathbf{f}\in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)\cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$．记 $J_{\mathbf{f}}(x)=\det|\mathbf{f}'(x)|$ 为 $\mathbf{f}$ 在点 $x\in\Omega$ 处的 Jacobi 行列式．对于这种情况，为了 $p\in\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbf{f}$ 的正则值，必须且仅须 $J_{\mathbf{f}}(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbf{f}^{-1}(p)$．从而为了 p 是 $\mathbf{f}$ 的临界值，必须且仅须 $\exists x\in\mathbf{f}^{-1}(p)$ 使 $J_{\mathbf{f}}(x)=0$．

以下记 $Z=\{x\in\Omega\,|\,J_{\mathbf{f}}(x)=0\}$，为 $\mathbf{f}$ 的临界集，则 $\Omega\backslash Z$ 是 $\mathbf{f}$ 的正则集．临界集中的点称为临界点，正则集中的点称为正则点．

我们分三步定义 Brouwer 度．

I. $\mathbf{f}\in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)\cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $p\notin \mathbf{f}(Z)$.

引理 4.1 设 $p\in\mathbb{R}^n\setminus(\mathbf{f}(Z)\cup\mathbf{f}(\partial\Omega))$, 则 $\mathbf{f}^{-1}(p)$ 是 Ω 中的有穷点集.

证明 因为 $\mathbf{f}^{-1}(p)\subset\overline{\Omega}$ 是闭的, 从而是紧的. 倘若有聚点 x^*, 则因 $x^*\in\mathbf{f}^{-1}(p)$ 表明 x^* 是 Ω 内一正则点. 但由反函数定理, $\mathbf{f}$ 将是 x^* 的一个邻域 U 和 p 的一个邻域 V 间的同胚, 这便与聚点矛盾.

根据这引理, $\forall p\in\mathbb{R}^n\setminus(\mathbf{f}(Z)\cup\mathbf{f}(\partial\Omega))$, 下式有定义

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p)=\sum_{x_i\in\mathbf{f}^{-1}(p)}\operatorname{sgn} J_{\mathbf{f}}(x_i) \tag{4.1}$$

为了要把条件 $p\notin\mathbf{f}(Z)$ 以及 $\mathbf{f}\in C^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ 去掉, 我们把(4.1)中定义的度表达成积分形式.

设 I 是以 p 为中心的一个立方砖, 设 $\psi: \mathbb{R}^n\xrightarrow{C}\mathbb{R}^1$, 满足

$$\operatorname{supp}\psi\subset I, \int\psi(y)\mathrm{d}y=1. \tag{4.2}$$

引入积分

$$\int_\Omega\psi\circ\mathbf{f}(x)J_{\mathbf{f}}(x)\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

将证明: (4.3)式与 ψ 的具体形式无关, 而且就是(4.1)中定义的度.

引理 4.2 设 $p\in\mathbb{R}^n\setminus(\mathbf{f}(\partial\Omega)\cup\mathbf{f}(Z))$, 则必存在满足(4.2)条件的函数 ψ, 使得

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p)=\int_\Omega\psi\circ\mathbf{f}(x)J_{\mathbf{f}}(x)\mathrm{d}x.$$

证明 设 $\mathbf{f}^{-1}(p)=\{x_1, \cdots, x_k\}$. 存在 x_i 的邻域 U_i, 使得 $\mathbf{f}: U_i\to\mathbf{f}(U_i)$ 是一个微分同胚, 并在 U_i 上 $J_{\mathbf{f}}(x)$ 同号, $i=1, \cdots, k$. 令 $V=\bigcap_{i=1}^{k}\mathbf{f}(U_i)$. 取一个以 p 为中心的立方砖 I 使 $I\subset V$, 再取 ψ 适合(4.2), 则

$$\int_\Omega\psi\circ\mathbf{f}(x)J_{\mathbf{f}}(x)dx=\int_{\mathbf{f}^{-1}(I)}\psi\circ\mathbf{f}(x)J_{\mathbf{f}}(x)\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{k}\int_{U_i}\psi\circ\mathbf{f}(x)\cdot J_{\mathbf{f}}(x)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}J_{\mathbf{f}}(x_i)\int_{U_i}\psi\circ\mathbf{f}(x)|J_{\mathbf{f}}(x)|\mathrm{d}x\\
&=\sum_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}J_{\mathbf{f}}(x_i)=\deg(\mathbf{f},\Omega,p).
\end{aligned}
$$

为证(4.3)中的积分与ψ的具体形式无关，我们要

引理 4.3 设$I\subset\mathbb{R}^n$是一个立方砖，$\psi:\mathbb{R}^n\xrightarrow{C}\mathbb{R}^1$，满足：

$$\operatorname{supp}\psi\subset I\quad 以及\quad\int\psi(y)\mathrm{d}y=0.$$

则必存在$v\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$使得$\operatorname{supp}v\subset I$，以及

$$\operatorname{div}v=\psi.$$

证明 不妨设$I=[-1,1]^n$. 然后对n作归纳法. 当$n=1$时，取$v(y)=\int_{-\infty}^{y}\psi(t)\mathrm{d}t$即合要求.

设$n=k$时，这引理已成立. 令

$$\phi(\hat{y})=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\hat{y},y_{k+1})\mathrm{d}y_{k+1},$$

其中$y=(\hat{y},y_{k+1})$，$\hat{y}=(y_1\cdots y_k)$. 则$\operatorname{supp}\phi\subset I_k\triangleq[-1,1]^k$，并且

$$\int\phi(\hat{y})\mathrm{d}\hat{y}=\int\psi(y)\mathrm{d}y=0.$$

由归纳法假设，存在$w\in C^1(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k)$，满足

$$\operatorname{supp}w\subset I_k,\ \operatorname{div}w=\phi.$$

取$\tau\in C^1(\mathbb{R}^1)$，$\operatorname{supp}\tau\subset I_1$，$\int_{-\infty}^{\infty}\tau(t)\mathrm{d}t=1$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\psi(\hat{y},y_{k+1})-\phi(\hat{y})\tau(y_{k+1})]\mathrm{d}y_{k+1}=0.$$

令
$$v_{k+1}(\hat{y},y_{k+1})=\int_{-\infty}^{y_{k+1}}[\psi(\hat{y},t)-\phi(\hat{y})\tau(t)]\mathrm{d}t,$$

则有
$$\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}v_{k+1}(\hat{y},y_{k+1})=\psi(\hat{y},y_{k+1})-\phi(\hat{y})\tau(y_{k+1}).$$

即得$\psi=\operatorname{div}v$，其中

$$v=(w_1(\hat{y})\tau(y_{k+1}),\cdots,w_k(\hat{y})\tau(y_{k+1}),v_{k+1}(\hat{y},y_{k+1})),$$

而 $$(w_1, \cdots, w_k)=w.$$

引理 4.4 设 $\mathbf{f}\in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)\cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, 则对引理 4.3 中的 ψ, 必存在 $u\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, 使得

$$\operatorname{supp} u\subset\Omega \quad 以及 \quad \operatorname{div} u=\psi\circ\mathbf{f}(x)\cdot J_{\mathbf{f}}(x).$$

证明 由引理 4.3, 对 ψ, 存在 $v=(v_1, \cdots, v_n)$使得

$$\operatorname{supp} v\subset I,\ \operatorname{div} v=\psi.\ 令$$

$$u_i(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} v_k\circ\mathbf{f}(x)\cdot J_{\mathbf{f}}^{ki}(x), & x\in\Omega,\\ 0, & x\notin\Omega,\end{cases}$$

其中 $J_{\mathbf{f}}^{ki}(x)$ 是 Jacobi 行列式 $J_{\mathbf{f}}(x)$ 中的 (k, i) 余子式. 于是 $\operatorname{supp} u\subset\mathbf{f}^{-1}(I)\subset\Omega$. 并有

$$\begin{aligned}\operatorname{div} u&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\\&=\sum_{i,k,l=1}^{n}\frac{\partial v_k\circ\mathbf{f}(x)}{\partial y_l}J_{\mathbf{f}}^{ki}(x)\cdot\frac{\partial\mathbf{f}_l}{\partial x_i}\\&\quad+\sum_{i,k=1}v_k\circ\mathbf{f}(x)\frac{\partial J_{\mathbf{f}}^{ki}(x)}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

因为 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{f}_l}{\partial x_i}J_{\mathbf{f}}^{ki}(x)=\delta_{kl}J_{\mathbf{f}}(x),$$

以及 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J_{\mathbf{f}}^{ki}}{\partial x_i}(x)=0.$$

后者是由于,当记 $\mathbf{f}=(\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_n)$,$g=(-1)^{k-1}(\mathbf{f}_1,\cdots,\widehat{\mathbf{f}_k},\cdots,\mathbf{f}_n)$时,

$$J_{\mathbf{f}}^{ki}=(-1)^{i-1}\det\left(\frac{\partial g}{\partial x_1},\cdots,\widehat{\frac{\partial g}{\partial x_i}},\cdots,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right);\ 于是$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}J_{\mathbf{f}}^{ki}&=\sum_{i\neq l}(-1)^{i-1}\det\left(\frac{\partial g}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_l},\cdots,\right.\\&\qquad\left.\widehat{\frac{\partial g}{\partial x_i}},\cdots,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l<i}(-1)^{i-1+l-2}\det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_l},\frac{\partial g}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)\right.\\&\qquad\left.+\sum_{l>i}(-1)^{i-1+l-1}\det\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_l\partial x_i},\frac{\partial g}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)\right)\\&=0.\end{aligned}$$

所以有 $\operatorname{div} u=\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v_{k}\circ \mathbf{f}}{\partial y_{k}} J_{\mathbf{f}}(x)=\psi\circ\mathbf{f}(x)\cdot J_{\mathbf{f}}(x)$.

现在便得到

定理 4.1 设 $\mathbf{f}\in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)\cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, 且有立方砖 $I\subset\mathbb{R}^n\setminus\mathbf{f}(\partial\Omega)$. 又设 $\psi\in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$满足

$$\operatorname{supp}\psi\subset I \quad 以及 \quad \int\psi(y)\mathrm{d}y=1,$$

则 $$\int\psi\circ\mathbf{f}(x)J_{\mathbf{f}}(x)\mathrm{d}x=不依赖于\ \psi\ 的常数.$$

证明 设 ψ_1, ψ_2 都满足定理中的假设. 令 $\psi=\psi_1-\psi_2$, 则 $\operatorname{supp}\psi\subset I$, 并有$\int\psi(y)\mathrm{d}y=0$. 应用引理 4.4, 有 u: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 适合 $\operatorname{supp} u\subset\Omega$, 以及

$$\operatorname{div} u=\psi\circ\mathbf{f}(x)\cdot J_{\mathbf{f}}(x).$$

于是有 $$\int\psi\circ\mathbf{f}(x)\cdot J_{\mathbf{f}}(x)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\operatorname{div} u(x)\mathrm{d}x=0$$

II. 去掉限制 $p\notin\mathbf{f}(Z)$

联合定理 4.1 与引理 4.2, 我们知道: 当 $\mathbf{f}\in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)\cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, 并且 $p\notin\mathbf{f}(Z)\cup\mathbf{f}(\partial\Omega)$时,

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p)=\int_{\Omega}\psi\circ\mathbf{f}(x)\cdot J_{\mathbf{f}}(x)\mathrm{d}x, \tag{4.4}$$

其中 ψ 是满足条件(4.2)的任意函数. 注意到(4.4)式右端的积分中不显含点 p. 而 ψ 对 p 的依赖性又只表现在 $\operatorname{supp}\psi\subset I$, I 是以 p 为中心的立方砖适合 $I\subset\mathbb{R}^n\setminus\mathbf{f}(\partial\Omega)$. 联合§3中的 Sard 定理, 正则值在 $\mathbf{f}(\Omega)$ 中是稠密的, 这样一来, 如果采用积分 $\int_{\Omega}\psi\circ\mathbf{f}(x)\cdot J_{\mathbf{f}}(x)\mathrm{d}x$ 作为 $\deg(\mathbf{f}, \Omega, p)$ 的定义, 那么就不必要求 $p\notin\mathbf{f}(Z)$. 因为这积分对一切 $p\notin\mathbf{f}(\partial\Omega)$ 都有定义, 对其稠密集(正则值 p)上的点, 这积分取一整值(公式(4.4)左边). 所以 $\int_{\Omega}\psi\circ\mathbf{f}(x)J_{\mathbf{f}}(x)\mathrm{d}x$ 永远取整值. 用它作为 deg 的定义, 限制 $p\notin\mathbf{f}(\partial\Omega)$可以去掉.

III. 扩充到一切连续映射

先证:

引理 4.5 设 $\phi: \overline{\Omega}\times[0,1]\xrightarrow{C}\mathbb{R}^n$. 又设 $\forall t\in[0,1]$, $\phi(\cdot, t)\in C^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$. 倘若 $p\notin\phi(\partial\Omega\times[0,1])$; 则

$$\deg(\phi(\cdot,t),\Omega,p)=\text{不依赖于 } t \text{ 的常数}.$$

证明 因为 $\phi(\partial\Omega\times[0,1])$ 是闭的, 所以有以 p 为中心的立方砖 I 使得 $I\cap\phi(\partial\Omega\times[0,1])=\emptyset$. 按条件(4.2)取函数 ψ, 则

$$\deg(\phi(\cdot,t),\Omega,p)=\int_\Omega\psi\circ\phi(x,t)J_{\phi(x,t)}(x)\mathrm{d}x.$$

右式既是 t 的整值的, 又是连续的函数, 所以只能是常值函数.

注 4.1 由引理 4.5 可见 $\deg(\mathbf{f},\Omega,p)$ 实际上只依赖于 $\mathbf{f}|_{\partial\Omega}$, Ω 及 p. 换句话说, 若给定 $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ 都是 $\psi:\partial\Omega\to\mathbb{R}^n\backslash p$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的 C^2 连续扩张, 则

$$\deg(\mathbf{f}_1,\Omega,p)=\deg(\mathbf{f}_2,\Omega,p).$$

现在利用 Weierstrass 逼近定理: $C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ 在 $C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ 中是稠密的, 我们来推广 deg 于一般连续映射.

设 $\mathbf{f}\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, $p\notin\mathbf{f}(\partial\Omega)$. 于是

$$\varepsilon=\inf_{x\in\partial\Omega}\|\mathbf{f}(x)-p\|>0 \tag{4.5}$$

我们来证明: $\forall g\in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, 只要

$$\|g-f\|_{C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)}<\varepsilon, \tag{4.6}$$

$\deg(g,\Omega,p)$都有定义, 并且都相等.

事实上, (1) $p\notin g(\partial\Omega)$, 这是(4.5), (4.6) 与三角形不等式的结果.

(2) 倘若 g_1, g_2 都满足(4.6), 即

$$\|g_i-\mathbf{f}\|_{C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)}<\varepsilon,\ i=1,2.$$

则 $\forall t\in[0,1]$,

$$\|tg_1+(1-t)g_2-\mathbf{f}\|_{C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)}<\varepsilon,$$

从而 $p\notin\phi(\partial\Omega\times[0,1])$, 其中 $\phi(x,t)=tg_1(x)+(1-t)g_2(x)$. 应用引理 4.5, 我们知道:

$$\deg(g_1, \Omega, p)=\deg(g_2, \Omega, p).$$

现在我们便可以定义一般的 Brouwer 度.

定义 4.1(Brouwer 度)　设 $\mathbf{f}\in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $p\notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$; 则定义

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p)=\deg(g, \Omega, p),$$

其中 $g\in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, 满足

$$\|g-\mathbf{f}\|_{C(\overline{\Omega})}<\operatorname{dist}(p, \mathbf{f}(\partial\Omega)).$$

Brouwer 度是取整值的.

4.2 Brouwer 度的基本性质与计算

Brouwer 度有下列基本性质:

I. 同伦不变性　设 $\phi: \overline{\Omega}\times[0, 1]\to\mathbb{R}^n$, $p\notin\phi(\partial\Omega\times[0, 1])$; 则 $\deg(\phi(\cdot, t), \Omega, p)=$ 常数.

证明　设 $\varepsilon=\operatorname{dist}(p, \phi(\partial\Omega\times[0, 1]))(>0)$. 由 Weierstrass 逼近定理, 有 $\hat{\phi}\in C^2(\overline{\Omega}\times[0, 1], \mathbb{R}^n)$, 使得

$$\|\phi-\hat{\phi}\|_{C(\overline{\Omega}\times[0,1])}<\varepsilon.$$

按定义 4.1, 以及引理 4.5 立得

$$\deg(\phi(\cdot, t), \Omega, p)=\deg(\hat{\phi}(\cdot, t), \Omega, p)=\text{常数}.$$

II. 平移不变性

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p)=\deg(\mathbf{f}-p, \Omega, \theta).$$

证明　当 $\mathbf{f}\in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ 并且 $p\notin\mathbf{f}(Z)$ 时,

$$\begin{aligned}\deg(\mathbf{f}, \Omega, p)&=\sum_{x_i\in\mathbf{f}^{-1}(p)}\operatorname{sgn} J_{\mathbf{f}}(x_i)\\&=\sum_{x_i\in(\mathbf{f}-p)^{-1}(\theta)}\operatorname{sgn} J_{\mathbf{f}}(x_i)\\&=\deg(\mathbf{f}-p, \Omega, \theta).\end{aligned}$$

再利用对 p 及对 $\mathbf{f}$ 的逼近过渡到一般结论.

推论 4.1　设 $p, q\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbf{f}(\partial\Omega)$ 的同一连通分支, 则

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p)=\deg(\mathbf{f}, \Omega, q).$$

证明　因为有连续曲线 $r: [0,1]\to\mathbb{R}^n\backslash\mathbf{f}(\partial\Omega)$, 使得 $r(0)=p$, $r(1)=q$, 从而

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p) = \deg(\mathbf{f} - r(0), \Omega, \theta) \qquad \text{(II)}$$
$$= \deg(\mathbf{f} - r(1), \Omega, \theta) \qquad \text{(I)}$$
$$= \deg(\mathbf{f}, \Omega, q). \qquad \text{(II)}$$

III. 区域可加性 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集，$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $p \notin \mathbf{f}(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$；则

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p) = \deg(\mathbf{f}, \Omega_1, p) + \deg(\mathbf{f}, \Omega_2, p).$$

证明 设 $\varepsilon = \mathrm{dist}(p, \mathbf{f}(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)))(>0)$. 取 $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ 适合 $\|g - \mathbf{f}\|_{C(\overline{\Omega})} < \varepsilon/2$, 取 $q \notin g(Z)$ 适合 $\|p - q\| < \varepsilon/2$, 则 $\mathrm{dist}(q, g(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))) > 0$. 但

$$\deg(g, \Omega, q) = \sum_{x_i \in g^{-1}(q)} \operatorname{sgn} J_g(x_i)$$
$$= \left(\sum_{x_i \in g^{-1}(q) \cap \Omega_1} + \sum_{x_i \in g^{-1}(q) \cap \Omega_2}\right) \operatorname{sgn} J_g(x_i)$$
$$= \deg(g, \Omega_1, q) + \deg(g, \Omega_2, q).$$

另一方面，
$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p) = \deg(g, \Omega, q),$$
$$\deg(\mathbf{f}, \Omega_i, p) = \deg(g, \Omega_i, q), \quad i = 1, 2.$$

这是因为 $\forall x \in \partial\Omega \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \subset \overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $\forall t \in [0, 1]$ 都有：

$$\theta \neq t\mathbf{f}(x) + (1-t)g(x) - tp - (1-t)q.$$

推论 4.2 $\deg(\mathbf{f}, \emptyset, p) = 0$.

证明 $\deg(\mathbf{f}, \emptyset, p) = 2\deg(\mathbf{f}, \emptyset, p)$.

推论 4.3（切除性） 设 $K \subset \overline{\Omega}$, 紧，并且 $p \notin \mathbf{f}(K) \cup \mathbf{f}(\partial\Omega)$, 则 $\deg(\mathbf{f}, \Omega, p) = \deg(\mathbf{f}, \Omega \setminus K, p)$.

证明 令 $\Omega_1 = \Omega \setminus K$, $\Omega_2 = \emptyset$, 则 $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) = \partial\Omega \cup K$. 直接应用 III 及推论 4.2.

推论 4.4（Kronecker 存在性） 设 $p \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$, 且 $\deg(\mathbf{f}, \Omega, p) \neq 0$, 则 $\mathbf{f}^{-1}(p) \neq \emptyset$.

证明 倘若不然：$p \notin \mathbf{f}(\overline{\Omega})$. 由推论 4.3,

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p) = \deg(\mathbf{f}, \Omega \setminus \overline{\Omega}, p) = 0.$$

这个推论经常用来判断方程 $\mathbf{f}(x) = p$ 的可解性。

IV. 规范性

$$\deg(id,\ \Omega,\ p)=\begin{cases}1, & p\in\Omega,\\ 0, & p\notin\Omega.\end{cases}$$

事实上，有更一般的

命题 4.1 设 L 是一个 $n\times n$ 实系数阵. $\theta\in\Omega$，则

$$\deg(L,\ \Omega,\ \theta)=(-1)^{\beta},$$

其中 $\beta=\sum\limits_{\lambda_j<0}\beta_j$，$\beta_j$ 是 L 的不同的负本征值 λ_j 的代数重数，即

$$\beta_j=\dim\bigcup_{k=1}^{\infty}\ker(\lambda_j I-L)^k.$$

证明 记 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ 为 L 的各本征值. 由定义，

$$\deg(L,\ \Omega,\ \theta)=\operatorname{sgn}\det L=\operatorname{sgn}\prod_{j=1}^{n}\lambda_j.$$

由于复根成对出现，以及正本征值对 sgn 无贡献. 所以

$$\operatorname{sgn}\prod_{j=1}^{n}\lambda_j=\operatorname{sgn}\prod_{\lambda_j<0}\lambda_j=\prod_{\lambda_j<0}(-1)^{\beta_j}=(-1)^{\beta}.$$

注 4.2 基本性质 I～IV 唯一地决定了 Brouwer 度. 一切其它性质可以由它们导出.

命题 4.2 设 $\mathbf{f}_i\in C(\Omega_i,\ \mathbb{R}^{n_i})$，$\Omega_i\subset\mathbb{R}^{n_i}$ 是有界开集，

$$p_i\notin\mathbf{f}_i(\partial\Omega_i),\ i=1,\ 2;$$

则
$$\begin{aligned}&\deg(\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2,\ \Omega_1\times\Omega_2,\ (p_1,\ p_2))\\ &=\deg(\mathbf{f}_1,\ \Omega_1,\ p_1)\deg(\mathbf{f}_2,\ \Omega_2,\ p_2).\end{aligned}$$

证明 由逼近，不妨设 $\mathbf{f}_i\in C^1(\overline{\Omega}_i,\ \mathbb{R}^{n_i})$，$p_i\notin\mathbf{f}_i(Z_i)$，$Z_i$ 是 $\mathbf{f}_i$ 的临界集. 则

$$\begin{aligned}&\deg(\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2,\ \Omega_1\times\Omega_2,\ (p_1,\ p_2))\\ &=\sum_{(x_i,y_j)\in\mathbf{f}_1^{-1}(p_1)\times\mathbf{f}_2^{-1}(p_2)}\operatorname{sgn}J_{\mathbf{f}_1\times\mathbf{f}_2}(x_i,\ y_j)\\ &=\sum_{(x_i,y_j)\in\mathbf{f}_1^{-1}(p_1)\times\mathbf{f}_2^{-1}(p_2)}\operatorname{sgn}J_{\mathbf{f}_1}(x_i)\cdot\operatorname{sgn}J_{\mathbf{f}_2}(y_j)\\ &=\sum_{x_i\in\mathbf{f}_1^{-1}(p_1)}\operatorname{sgn}J_{\mathbf{f}_1}(x_i)\sum_{y_j\in\mathbf{f}_2^{-1}(p_2)}\operatorname{sgn}J_{\mathbf{f}_2}(y_j)\\ &=\deg(\mathbf{f}_1,\ \Omega_1,\ p_1)\cdot\deg(\mathbf{f}_2,\ \Omega_2,\ p_2).\end{aligned}$$

有一类映射. 它的 Brouwer 度比较容易计算. 设 $\Lambda\subset\mathbb{C}^n$ 是复 n 维空间中的有界开集. 设 $F:\overline{\Lambda}\to\mathbb{C}^n$ 是一个解析映射. 即

$$F=(F_1,\ \cdots,\ F_n),$$

其中每个分量 F_j 都是 $\overline{\Lambda}$ 上的解析函数. 换句话说, $\forall z=(z_1,\cdots,z_n)\in\Lambda$, 成立着

$$\partial_{\bar{z}_k}F_j(z)=0,\quad j,\ k=1,\ \cdots,\ n. \tag{4.7}$$

每个复向量 $z\in\mathbb{C}^n$ 可以通过 $z=x+iy$, x, $y\in\mathbb{R}^n$ 规定自然同构: $z\mapsto(x,\ y)$, 把 $\mathbb{C}^n$ 等同于 $\mathbb{R}^{2n}$. 记 Ω 为 Λ 在这同构下的象. 同样, 把 F 写成 $F=u+iv$, u, $v\in\mathbb{R}^n$, 也按 $F\mapsto(u,\ v)$把它看成是 $\Omega\to\mathbb{R}^{2n}$ 中的映射 $\mathbf{f}$. 设 $b\in\mathbb{C}^n$, $b\notin F(\partial\Lambda)$. 令 p 是 b 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的象, 这便等价于 $p\notin\mathbf{f}(\partial\Omega)$. 于是我们对解析映射 F, 区域 Λ, 点 $b\in\mathbb{C}^n$, 可以通过$(\mathbf{f},\ \Omega,\ p)$的 Brouwer 度来定义它们的度:

$$\deg(F,\ \Lambda,\ b)=\mathrm{dog}(\mathbf{f},\ \Omega,\ p).$$

解析映射 F 的度有一个特殊性. 这是由 (4.7) 对应的 Cauchy-Riemann 方程组决定的:

$$\begin{array}{l}\partial_{x_k}u_j=\partial_{y_k}v_j,\\ \partial_{x_k}v_j=-\partial_{y_k}u_j,\end{array}\quad j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \tag{4.8}$$

引理 4.6 $\det|\mathbf{f}'(p)|=2^{2n}\,\mathrm{dot}|\partial_z F(b)|^2$.

证明 直接计算

$$\begin{aligned}\det|\mathbf{f}'(p)|&=\begin{vmatrix}\partial_{x_k}u_j & \partial_{y_k}u_j\\ \partial_{x_k}v_j & \partial_{y_k}v_j\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\partial_{x_k}u_j & \partial_{y_k}u_j\\ -\partial_{y_k}u_j & \partial_{x_k}u_j\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}\partial_{x_k}u_j-i\partial_{y_k}u_j & \partial_{y_k}u_j\\ -i(\partial_{x_k}u_j-i\partial_{y_k}u_j) & \partial_{x_k}u_j\end{vmatrix}\\ &=2^{2n}\begin{vmatrix}\partial_z F & \partial_j u\\ 0 & \overline{\partial_z F}\end{vmatrix}=2^{2n}\det|\partial_z F|^2.\end{aligned}$$

推论 4.5 $\deg(F,\ \Lambda,\ b)\geqslant 0$. 并且

$$\deg(F,\ \Lambda,\ b)>0\Leftrightarrow b\in F(\Lambda).$$

证明 当 b 是 F 的正则值时, 由定义及引理 4.6, $\deg(F,\ \Lambda,\ b)\geqslant 0$. 再由逼近, 立得第一个结论. 至于后一个结论: "$\Rightarrow$"是 Kronecker 存在性. 证"$\Leftarrow$": 设 $z_0\in F^{-1}(b)$, 作扰动 $F_\varepsilon(z)=F(z)+\varepsilon(z-z_0)$, $\varepsilon>0$ 则 $\det(\partial_z F_\varepsilon)(z_0)=\varepsilon^n+\cdots$总可以适当选

择小的 ε 使得 $\det(\partial_z F_\varepsilon)(z_0)\neq 0$. 于是 $F_\varepsilon(z)$ 在 $B(z_0,\delta)$ 内是 1－1 的 $(\delta>0)$. 并且

$$\begin{aligned}\deg(F, \Delta, b)&=\deg(F_\varepsilon, \Delta, b)\\&=\deg(F_\varepsilon, B(z_0, \delta), b)\\&\quad+\deg(F_\varepsilon, \Delta\setminus B(z_0, \delta), b)\\&\geqslant 1+0=1>0.\end{aligned}$$

注 4.3　引理 4.6 表示解析映射是保定向的.

作为一个例子，我们来求下列映射的度. F: $z=(z_1, \cdots, z_n)\mapsto(z_1^{\lambda_1}, \cdots, z_n^{\lambda_n})$, 其中 $\lambda_1, \cdots\lambda_n$ 是非负整数.

命题 4.3　设 $\theta\in\Delta$, Δ 是一个有界开集, 则

$$\deg(F, \Delta, \theta)=\prod_{j=1}^{n}\lambda_j.$$

证明　由切除性, $\exists\varepsilon>0$, 使得

$$\deg(F, \Delta, \theta)=\deg(F, D_\varepsilon^n, \theta),$$

其中 $D_\varepsilon^n=\underbrace{D_\varepsilon\times\cdots\times D_\varepsilon}_{n\text{次}}$, 而 D_ε 是 $\mathbb{C}^1$ 中半径为 ε 的以 θ 为中心的圆碟. 利用命题 4.2,

$$\deg(F, D_\varepsilon^n, \theta)=\prod_{j=1}^{n}\deg(z^{\lambda_j}, D_\varepsilon, \theta).$$

再应用扰动的连续性,

$$\deg(z^{\lambda_j}, D_\varepsilon, \theta)=\deg\left(z^{\lambda_j}, D_\varepsilon, \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\lambda_j}\right),$$

而 $z^{\lambda_j}=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\lambda_j}$ 恰有 λ_j 个根. 由度的定义及推论 4.5 得到

$$\deg(z^{\lambda_j}, D_\varepsilon, \theta)=\lambda_j.$$

最后，我们再介绍 Brouwer 度的另一个重要性质——Leray 乘积公式.

V. Leray 乘积公式　设 f: $\overline{\Omega}\xrightarrow{\text{连续}}\mathbb{R}^n$, 又设 M 是包含 $f(\overline{\Omega})$ 的一个开集. 若

$$\Delta=M\setminus f(\partial\Omega)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_i,$$

其中 Δ_i 是 Δ 的连通分量, 而 g: $\overline{M}\xrightarrow{\text{连续}}\mathbb{R}^n$; $p\notin g\circ f(\partial\Omega)\cup g(\partial M)$;

则

$$\deg(g\circ\mathbf{f},\ \Omega,\ p)=\sum_j \deg(g,\ \Delta_j,\ p)\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ \Delta_j).$$

在证明这公式之前，说明一下：(1) $\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ \Delta_j)$ 的意义，(2) 右端和号的收敛性.

(1) 按推论 4.1, $\forall q_1,\ q_2\in\Delta_j$, 都有 $\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ q_1)=\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ q_2)$；因此度仅依赖于 Δ_j, 而与具体的点无关. 因此记

$$\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ \Delta_j)\triangleq\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ q),\ \forall q\in\Delta_j.$$

(2) 右端的和式至多只有有穷个 $\neq 0$. 事实上，因为 $g^{-1}(p)$ 是紧的，并且 $g^{-1}(p)\cap(\partial M\cup\mathbf{f}(\partial\Omega))=\emptyset$, 所以 $\Delta=\bigcup_{j=1}^{\infty}\Delta_j$ 覆盖了 $g^{-1}(p)$. 而 $\Delta_i\cap\Delta_j=\emptyset$ 当 $i\neq j$, 于是至多有有穷个 Δ_j 覆盖了 $g^{-1}(p)$.

证明 1° 先设 $\mathbf{f}\in C^1(\overline{\Omega})$, $g\in C^1(\overline{M})$, 且 p 是 $g\circ\mathbf{f}$ 的正则值. 有 $J_{g\circ\mathbf{f}}(x)=J_g(\mathbf{f}(x))\cdot J_{\mathbf{f}}(x)$, 由此可见 $y=\mathbf{f}(x)$, 也是 $\mathbf{f}$ 的正则值，其中 $x\in(g\circ\mathbf{f})^{-1}(p)$. 此外，$p$ 还是 g: $\overline{M}\cap\mathbf{f}(\overline{\Omega})\to\mathbb{R}^n$ 的正则值；于是，

$$\begin{aligned}
&\deg(g\circ\mathbf{f},\ \Omega,\ p)\\
&=\sum_{x_j\in(g\circ\mathbf{f})^{-1}(p)}\operatorname{sgn} J_{g\circ\mathbf{f}}(x_j)\\
&=\sum_{x_j\in(g\circ\mathbf{f})^{-1}(p)}\operatorname{sgn} J_g(\mathbf{f}(x_j))\cdot\operatorname{sgn} J_{\mathbf{f}}(x_j)\\
&=\sum_{y_k\in g^{-1}(p)\cap\mathbf{f}(\Omega)}\operatorname{sgn} J_g(y_k)\Big(\sum_{x_j\in\mathbf{f}^{-1}(y_k)}\operatorname{sgn} J_{\mathbf{f}}(x_j)\Big)\\
&=\sum_{y_k\in g^{-1}(p)\cap\mathbf{f}(\Omega)}\operatorname{sgn} J_g(y_k)\cdot\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ y_k).
\end{aligned}$$

再把属于同一 Δ_j 的 y_k 放在一起，因为

$$\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ y_k)=\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ \Delta_j),$$

所以上式又等于

$$\begin{aligned}
&\sum_j\sum_{y_k\in g^{-1}(p)\cap\Delta_j}\operatorname{sgn} J_g(y_k)\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ \Delta_j)\\
&=\sum_j\deg(g,\ \Delta_j,\ p)\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ \Delta_j).
\end{aligned}$$

2° 过渡到一般的 $\mathbf{f}\in C(\overline{\Omega})$, $g\in C(\overline{M})$. 现在麻烦的地方是 Δ 以及 $\{\Delta_j\}$ 都随 $\mathbf{f}$ 的变化而变化. 在取 $C^1(\overline{\Omega})$ 逼近时，要设法克服这一困难. 令 $O_k=\{y\in M\mid\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ y)=k\}$, 则

$$O_k=\bigcup\{\Delta_j|\deg(\mathbf{f},\Omega,\Delta_j)=k\},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.$$

设
$$\varepsilon=\operatorname{dist}(g^{-1}(p),\ \mathbf{f}(\partial\Omega))\ (>0),$$

取 $\hat{\mathbf{f}}\in C^1(\overline{\Omega})$ 使得

$$\|\hat{\mathbf{f}}-\mathbf{f}\|_{C(\overline{\Omega})}<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$p\notin g(\partial M)\cup g\circ\hat{\mathbf{f}}(\partial\Omega) \tag{4.9}$$

令
$$\hat{O}_k=\{y\in M\,|\deg(\hat{\mathbf{f}},\ \Omega,\ y)=k\},$$

再取 $g\in C^1(\overline{M})$ 使得

$$\|\hat{g}-g\|_{C(\overline{M})}<\operatorname{dist}(p,\ g(\partial M)\cup g\circ\hat{\mathbf{f}}(\partial\Omega)).$$

因 $\partial\hat{O}_k\subset\hat{\mathbf{f}}(\partial\Omega)\cup\partial M$，故

$$\|\hat{g}-g\|_{C(\overline{M})}<\operatorname{dist}(p,\ g(\partial\hat{\mathcal{O}}_k)).$$

于是有 $p\notin\hat{g}(\partial\hat{\mathcal{O}}_k)$，即得

$$\deg(g,\ \hat{\mathcal{O}}_k,\ p)=\deg(\hat{g},\ \hat{\mathcal{O}}_k,\ p). \tag{4.10}$$

然而 $g^{-1}(p)\cap\mathcal{O}_k=g^{-1}(p)\cap\hat{\mathcal{O}}_k$. 这是因为 $\forall y\in g^{-1}(p)\cap\mathcal{O}_k$, $\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ y)=k$，因此 $\deg(\hat{\mathbf{f}},\ \Omega,\ y)=k\Rightarrow y\in g^{-1}(p)\cap\hat{\mathcal{O}}_k$. 类似地 $\forall y\in g^{-1}(p)\cap\hat{\mathcal{O}}_k$, $y\in g^{-1}(p)\cap\mathcal{O}_k$. 于是由切除性，

$$\deg(g,\ \mathcal{O}_k,\ p)=\deg(g,\ \mathcal{O}_k\cap\hat{\mathcal{O}}_k),\ p)=\deg(g,\ \hat{\mathcal{O}}_k,\ p) \tag{4.11}$$

联合(4.10)与(4.11)得到

$$\deg(g,\ \mathcal{O}_k,\ p)=\deg(\hat{g},\ \hat{\mathcal{O}}_k,\ p). \tag{4.12}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\deg(g\circ\mathbf{f},\ \Omega,\ p)\\
&=\deg(\hat{g}\circ\hat{\mathbf{f}},\ \Omega,\ p)\quad(\text{同伦不变})\\
&=\sum_k\deg(\hat{g},\ \hat{\mathcal{O}}_k,\ p)\deg(\hat{\mathbf{f}},\ \Omega,\ \hat{\mathcal{O}}_k) \qquad (1^\circ)\\
&=\sum_k k\deg(g,\ \mathcal{O}_k,\ p)\quad(\text{由(4.12)及定义})\\
&=\sum_k\deg(g,\ \mathcal{O}_k,\ p)\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ \mathcal{O}_k)\\
&=\sum_j\deg(g,\ \Delta_j,\ p)\deg(\mathbf{f},\ \Omega,\ \Delta_j).
\end{aligned}$$

4.3 Leray-Schauder 度

因为分析中遇到的连续映射一般是在无穷维空间上的，所以

自然要想把 Brouwer 度推广到一般的 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上去. 然而这种推广不可能对任意连续映射都适用. 这是因为如果这种度的理论被构成,它具备 § 4.2 中的基本性质——同伦不变性、区域可加性与规范性,那么下述 Brouwer 不动点定理就应成为其直接的推论.

定理 4.2 设 B 是 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 中的单位开球. 又设对 $f_t=id-t\phi$, $t\in[0,1]$ 以及 $\theta\notin f_t(\partial B)$, $\deg(f_t, B, \theta)$ 有定义, 满足同伦不变性、区域可加性以及规范性. 则必有 $x\in B$ 使得

$$\phi(x)=x.$$

证明 考察 $f_t=id-t\phi$, $t\in[0,1]$, 由假设必有: $\theta\notin f_t(\partial B)$. 由同伦不变性,

$$\deg(f_1, B, \theta)=\deg(id, B, \theta)=1 \text{ (规范性)}.$$

从而 $f_1^{-1}(\theta)\cap B\neq\emptyset$(区域可加性的推论), 即有 $x\in B$ 使 $\phi(x)=x$.

推论 4.6(Brouwer) 设 $\phi: \overline{D^n}\to\overline{D^n}$ 连续, 其中 D^n 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球, 则必有不动点 $x\in\overline{D^n}$, $\phi(x)=x$.

然而对于∞维的 Banach 空间, 定理 4.2 中的 ϕ 不能是任意的连续映射.

例 $\mathscr{X}=l^2=\left\{x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\,\middle|\,\|x\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2<\infty\right\}$. 设 $\phi: x\mapsto(\sqrt{1-\|x\|^2}, x_1, x_2, \cdots)$, 则 $\phi: \overline{B}\to\overline{B}$ 连续. 但 ϕ 在 $\overline{B}$ 上却没有不动点.

因为若有 $\bar{x}\in\overline{B}$, $\phi(\bar{x})=\bar{x}$, 那么一方面,应有 $\|\bar{x}\|=1$, 另一方面, $\bar{x}_1=0$, $\bar{x}_2=\bar{x}_1=0$, $\cdots$, $\bar{x}_n=\cdots=0$. 即得 $\bar{x}=\theta$. 这是一个矛盾.

定义 4.2 设 $\Omega\subset\mathscr{X}$, $K: \Omega\to\mathscr{X}$ 连续, 称其为紧的, 是指它映有界闭集为列紧集.

和以前一样, 以下设 Ω 是 $\mathscr{X}$ 中的有界开集.

引理 4.7 设 $K: \overline{\Omega}\to\mathscr{X}$ 是一个紧算子, 则 $\forall\varepsilon>0$, 有取值于有穷维子空间 $E^{n(\varepsilon)}$ 的连续算子 K_ε, 使得

$$\|K(x)-K_\varepsilon(x)\|\leqslant\varepsilon\quad\forall x\in\overline{\Omega}.$$

证明 因为$K(\overline{\Omega})$可以被有穷多个球$\bigcup_{i=1}^{m_\varepsilon} B(y_i, \varepsilon)$所覆盖. 令$\psi_i(x)=(\varepsilon-\|x-y_i\|)_+$, 其中$\lambda_+=\lambda$当$\lambda\geqslant 0$, $=0$当$\lambda<0$. 再令$\varphi_i(x)=\dfrac{\psi_i(x)}{\sum_{j=1}^{m_\varepsilon}\psi_j(x)}$, $i=1, 2, \cdots, m_\varepsilon$. 以及

$$K_\varepsilon(x)=\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\varphi_i(K(x))y_i,$$

则$K_\varepsilon(x)\subset \mathrm{span}\{y_1, \cdots, y_{m_\varepsilon}\}$并且

$$\|K(x)-K_\varepsilon(x)\|\leqslant\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\varphi_i(K(x))\|K(x)-y_i\|$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{m_\varepsilon}\varphi_i(K(x))=\varepsilon.$$

引理 4.8 设$K: \overline{\Omega}\to\mathscr{X}$是紧的, $\mathbf{f}=id-K$, $S\subset\overline{\Omega}$是一闭子集; 则$\mathbf{f}(S)$是闭集.

证明 设$x_n\in S$, $\mathbf{f}(x_n)\to z^*$; 则$Kx_{n_i}\to y^*$, $\Rightarrow x_{n_i}\to z^*-y^*$记为$x^*$, 则$x^*\in S$. 由$K$连续$Kx^*=y^*$, 从而$\mathbf{f}(x^*)=z^*$. 即$z^*\in\mathbf{f}(S)$.

再回过来看 Brouwer 度的一个性质.

命题 4.4 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是一个有界开集, $\mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^n$, $i: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $x=(x_1, \cdots, x_m)\mapsto\hat{x}=(x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)$是正则浸没. 又设$K: \overline{\Omega}\to\mathbb{R}^m$连续, $\mathbf{f}=id-K$, $p\in\mathbb{R}^m$满足: $\hat{p}\notin\mathbf{f}(\partial\Omega)$; 则

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, \hat{p})=\deg(\mathbf{f}|_{\mathbb{R}^m\cap\Omega}, \mathbb{R}^m\cap\Omega, p).$$

证明 设$\varepsilon=\mathrm{dist}(\hat{p}, \mathbf{f}(\partial\Omega))\,(>0)$. 取$\hat{K}\in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$满足$\|K-\hat{K}\|_{C(\overline{\Omega})}<\varepsilon/2$. 令$\hat{g}=id-\hat{K}$. 则

$$J_g(y)=\det\begin{pmatrix} id-\dfrac{\partial\hat{K}}{\partial x_j} & -\dfrac{\partial\hat{K}}{\partial x_k} \\ 0 & id\end{pmatrix}\quad \begin{matrix} i, j=1, \cdots, m, \\ k=m+1, \cdots, n.\end{matrix}$$

又因为$g|_{\mathbb{R}^m\cap\overline{\Omega}}: \mathbb{R}^m\cap\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^m$, 所以由 Sard 定理, 它的临界值集是$m$维零测集, 便有$q\in\mathbb{R}^m$是它的正则值, 满足$\|p-q\|<\varepsilon/2$. 这时还有$\hat{q}\notin g(\partial\Omega)$. 于是,

$$\begin{aligned}\deg(\mathbf{f}, \Omega, \hat{p}) &= \deg(g, \Omega, \hat{q}) \quad (\text{同伦不变}) \\ &= \sum_{y_i \in g^{-1}(\hat{q})} \operatorname{sgn} J_g(y_i) \\ &= \sum_{y_i \in g|^{-1}_{\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}}(q)} \operatorname{sgn} Jg|_{\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}}(y_i) \, (g^{-1}(\hat{q}) \subset \mathbb{R}^m \cap \Omega) \\ &= \deg(g|_{\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}}, \mathbb{R}^m \cap \Omega, q) \\ &= \deg(\mathbf{f}|_{\mathbb{R}^m \cap \bar{\Omega}}, \mathbb{R}^m \cap \Omega, p) \quad (\text{同伦不变}).\end{aligned}$$

现在对于 $\mathbf{f}=id-K$，其中 K 是紧算子的情形定义拓扑度.

定义 4.3 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间，$\mathbf{f}=id-K$，其中 K: $\bar{\Omega}\to\mathscr{X}$ 是紧的，$p\notin\mathbf{f}(\partial\Omega)$. 定义

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, p)=\deg(\mathbf{f}_\varepsilon, \Omega\cap E_\varepsilon, p),$$

其中 $\varepsilon\in(0, \operatorname{dist}(p, \mathbf{f}(\partial\Omega)))$，$\mathbf{f}_\varepsilon=id-K_\varepsilon$，$K_\varepsilon$ 是一个取值在有穷维空间 E_ε 的连续算子，适合：$p\in E_\varepsilon$ 以及

$$\|Kx-K_\varepsilon x\|\leqslant\varepsilon \quad \forall x\in\bar{\Omega}.$$

当然必须说明定义 4.3 的合理性.

1° 首先按引理 4.8，$\operatorname{dist}(p, \mathbf{f}(\partial\Omega))>0$，再按引理 4.7，存在着这样的 K_ε 与 E_ε.

2° 其次再证：所有这些 $\mathbf{f}_\varepsilon$, E_ε 对应的 $\deg(f_\varepsilon, \Omega\cap E_\varepsilon, p)$ 都有定义并且是相等的.

$\operatorname{dist}(p, \mathbf{f}_\varepsilon(\partial\Omega\cap E_\varepsilon))\geqslant\operatorname{dist}(p, \mathbf{f}(\partial\Omega))-\varepsilon>0\Rightarrow$ 有定义.

设 $(\mathbf{f}_{\varepsilon_0}, E_{\varepsilon_0})$, $(\mathbf{f}_{\varepsilon_1}, E_{\varepsilon_1})$ 是任意两组满足定义假设的映射与有穷维子空间，令 $\hat{E}=\operatorname{span}\{E_{\varepsilon_0}, E_{\varepsilon_1}\}$，$\hat{\mathbf{f}}_{\varepsilon_i}=id-\hat{K}_{\varepsilon_i}$，其中 $\hat{K}_{\varepsilon_i}$ 按命题 4.4 中的方式把 K_{ε_i} 浸没到空间 $\hat{E}$ 上，$i=0, 1$. 于是有

$$\deg(\mathbf{f}_{\varepsilon_i}, E_{\varepsilon_i}\cap\Omega, p)=\deg(\hat{\mathbf{f}}_{\varepsilon_i}, \hat{E}\cap\Omega, p), \ i=0, 1.$$

再令 $\phi_t(x)=t\hat{\mathbf{f}}_{\varepsilon_0}(x)+(1-t)\hat{\mathbf{f}}_{\varepsilon_1}(x)$，$\forall t\in[0, 1]$. 应用 Brouwer 度的同伦不变性还有

$$\deg(\hat{\mathbf{f}}_{\varepsilon_0}, \hat{E}\cap\Omega, p)=\deg(\hat{\mathbf{f}}_{\varepsilon_1}, \hat{E}\cap\Omega, p).$$

这就证明了

$$\deg(\mathbf{f}_{\varepsilon_0}, E_{\varepsilon_0}\cap\Omega, p)=\deg(\mathbf{f}_{\varepsilon_1}, E_{\varepsilon_1}\cap\Omega, p).$$

和 Brouwer 度的基本性质一样，Leray-Schauder 度也有下列基本性质：

I(**同伦不变性**) 设 $K: \overline{\Omega}\times[0,1]\to\mathscr{X}$ 紧, $p\notin(id-K)(\partial\Omega\times[0,1])$, 则 $\deg(id-K(\cdot,t),\Omega,p)=$ 常数.

II(**平移不变性**) $\deg(id-K,\Omega,p)=\deg(id-K-p,\Omega,\theta)$.

III(**区域可加性**) 设 $\Omega_1,\Omega_2\subset\Omega$, $\Omega_1\cap\Omega_2=\emptyset$, $p\notin(id-K)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1\cup\Omega_2))$; 则

$$\begin{aligned}&\deg(id-K,\Omega,p)\\&\quad=\deg(id-K,\Omega_1,p)+\deg(id-K,\Omega_2,p).\end{aligned}$$

IV(**规范性**) $\deg(id,\Omega,p)=\begin{cases}1, & 当\ p\in\Omega,\\ 0, & 当\ p\notin\Omega.\end{cases}$

同样地, 由这些基本性质导出的其它命题(推论 4.1~4.4)也都成立, 因为证明方法是标准的, 都是通过 ε-逼近的办法化到有穷维空间, 再应用 Brouwer 度的相应性质, 所以略去不证了.

最后有

命题 4.1′ 设 K 是一个线性紧算子, $1\notin K$ 的谱集 $\sigma(K)$, $\theta\in\Omega$, 则 $\deg(id-K,\Omega,\theta)=(-1)^{\beta}$, 其中 $\beta=\sum\limits_{\substack{\lambda_j>1\\ \lambda_j\in\sigma(K)}}\beta_j$ 而

$$\beta_j=\dim\bigcup_{k=1}^{\infty}\ker(\lambda_jI-K)^k.$$

证明 由 Riesz-Schauder 理论, $\sigma(K)$ 除 0 外只有点谱. 记 E_1 对应着由一切广义本征向量, 其本征值 $\lambda>1$ 所张成的有穷维子空间, 则有直和分解: $\mathscr{X}=E_1\oplus E_2$, E_1, E_2 都是 K 的不变子空间. 在 E_i 上, 记 $K|_{E_i}=K_i$, 则 $\forall t\in[0,1]$, $tK_2x\neq x$, $\forall x\in E_2\backslash\theta$. 由同伦不变性与切除性质, $\exists\varepsilon>0$ 使得

$$\begin{aligned}&\deg(id-K,\Omega,\theta)\\&\quad=\deg(id-K,B_\varepsilon,\theta)\\&\quad=\deg(id-(K_1\oplus tK_2),B_\varepsilon,\theta)\quad(同伦不变)\\&\quad=\deg(id-K_1,B_\varepsilon,\theta)=(-1)^{\beta}\quad(命题\ 4.1).\end{aligned}$$

作为定理 4.2 的推论还有

推论 4.7(Schauder) 设 $K: B_1\to B_1$ 紧, 则 K 在 B_1 必有不动点.

§5 Соболев 空间及偏微分算子

5.1 Соболев 空间

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集. 用以下记号

$$\partial^\alpha=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

$\mathscr{D}(\Omega)$表示支集关于 Ω 紧的一切 C^∞ 函数全体. 用$\mathscr{D}'(\Omega)$ 表示 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的连续线性泛函全体, 即广义函数空间.

设m是一个正整数. 记

$C^m(\overline{\Omega})=\{u: \overline{\Omega}\to\mathbb{R}^1\,|\,\partial^\alpha u(x)$ 在 $\overline{\Omega}$ 连续, $|\alpha|\leqslant m\}$. 规定模为

$$\|u\|_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|\partial^\alpha u(x)|.$$

称 $C^m(\overline{\Omega})$为m次连续可微函数空间.

又设 $0<\gamma\leqslant 1$, 记

$$C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})=\left\{u\in C^m(\overline{\Omega})\,\Big|\,\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}<+\infty, |\alpha|=m\right\},$$

规定模为 $$\|u\|_{m,\gamma}=\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})}+\sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ |\alpha|=m}}\frac{|\partial^\alpha u(x)-\partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\gamma}$$

称 $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$为 $m+\gamma$ 次 Hölder 连续函数空间.

设 $p\geqslant 1$, $m\geqslant 0$ 是一整数. 记

$$W_p^m(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega)\,|\,\partial^\alpha u\in L^p(\Omega),\ |\alpha|\leqslant m\},$$

这里 $\partial^\alpha u$ 是 u 的 α 阶广义导数. 规定模:

$$\|u\|_{W_p^m}=\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\}^{\frac{1}{p}}.$$

称 $W_p^m(\Omega)$ 为 Соболев 空间.

容易验证: $C^m(\overline{\Omega})$, $C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$ 以及 $W_p^m(\Omega)$ 都是 Banach 空间. 特别地, 当 $p=2$ 时, $W_2^m(\Omega)$ 有内积

$$(u,\ v)_{W_2^m}=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega\partial^\alpha u(x)\cdot\partial^\alpha\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x,$$

从而还是 Hilbert 空间. 有时记 $W_2^m(\Omega)$为 $H^m(\Omega)$.

因为显然有: $\mathscr{D}(\Omega)\subset W_p^m(\Omega)$, 记 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W_p^m(\Omega)$ 中的闭包为 $\mathring{W}_p^m(\Omega)$. 当 $p=2$ 时, 记作 $H_0^m(\Omega)$.

然而对于 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 时, 却有

性质 5.1　$\mathscr{D}$ 在 W_p^m 中是稠密的, 即 $\mathring{W}_p^m(\mathbb{R}^n)=W_p^m(\mathbb{R}^n)$.

当 $\Omega\neq\mathbb{R}^n$ 时, 一般来说, $\mathscr{D}(\Omega)$ 不在 $W_p^m(\Omega)$中稠密, 但却有

性质 5.2　$(W_p^m\cap C^\infty)(\Omega)$在 $W_p^m(\Omega)$中是稠密的.

(参看 Adams [Ad 1 § 3.16]).

当 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 时, 由于有性质 5.1, $W_p^m(\Omega)$的许多性质往往可以化到 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$函数去研究, 为考察一般的区域, 引入

定义 5.1　设 k 是一个正整数, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集, 称它是 k 可延拓的, 是指: $\forall p\geqslant 1$, 存在线性连续的 T: $W_p^k(\Omega)\to W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$Tu|_\Omega=u\quad \forall u\in W_p^k(\Omega).$$

例 1　$\Omega=\mathbb{R}_+^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n|x_n>0\}$是 k 可延拓的; 其中 k 是任意正整数. 事实上, 延拓算子构造如下:

$$Tu(x)=\begin{cases}u(x) & \text{当 } x_n>0,\\ \sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j u(x_1,\cdots,x_{n-1},-jx_n) & \text{当 } x_n\leqslant 0,\end{cases}$$

其中系数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{k+1}$ 是下列线性方程组

$$\sum_{j=1}^{k+1}(-j)^i\lambda_j=1\quad i=0,1,\cdots,k$$

的唯一解. 不难验证: $\forall u\in W_p^k(\mathbb{R}_+^n)$,

$$\|Tu\|_{W_p^k(\mathbb{R}_n)}\leqslant M_{k,p}\|u\|_{W_p^k(\mathbb{R}_+^n)}$$

其中 $M_{k,p}$ 是常数.

例 2　若 Ω 是有界开区域, 具有一致 C^k 光滑的边界; 则 Ω 是 k 可延拓的.

证明参看 Adams[Ad1 定理 4.26].

更一般的结果可参看 E. M. Stein [St1, p. 189].

Соболев 空间也可以扩充到负指标. 设 $m\geqslant 0$, $1<p<+\infty$, 又

设

$$W_p^{-m}(\Omega)=\{u\in\mathscr{D}'(\Omega)\,|\,u=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\partial^\alpha g_\alpha,\ g_\alpha\in L^p(\Omega)\},$$

并规定模：

$$\|u\|_{W_p^{-m}}=\sup_{\|v\|_{\mathring{W}_{p'}^m}=1}\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^\alpha\int_\Omega g_\alpha(x)\partial^\alpha v(x)\mathrm{d}x,$$

不难验证 $W_p^{-m}(\Omega)$ 也是 Banach 空间，并且有

$$(\mathring{W}_p^m(\Omega))^*=W_{p'}^{-m}(\Omega)\quad 当\ 1<p<+\infty,\ m\geqslant 0,$$

其中 * 表示对偶空间，而 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

空间 $\mathring{W}_p^m$ 与 $W_{p'}^{-m}$ 间的对偶关系如下：

$$\langle u,v\rangle=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega g_\alpha(x)\partial^\alpha v(x)\mathrm{d}x,$$

$\forall u\in W_{p'}^{-m}(\Omega),\ v\in\mathring{W}_p^m(\Omega)$.

5.2 嵌入定理

下面要建立一些积分不等式，通过对一个函数及其广义导数的幂次可积性，获得这函数自身较强的连续性或较高幂次的可积性.

这些积分不等式在偏微分方程理论中极为重要.

引理 5.1 设 $\varphi_j(x_j')\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n-1})$，$j=1,\cdots,n$，其中 $x_j'=(x_1,\cdots,\hat{x}_j,\cdots,x_n)$；则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^n|\varphi_j(x_j')|^{\frac{1}{n-1}}\mathrm{d}x\leqslant\prod_{j=1}^n\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\varphi_j(x_j')|\mathrm{d}x_j'\right)^{\frac{1}{n-1}}.\qquad(5.1)$$

证明 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时，等式

$$\int_{\mathbb{R}^2}|\varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int|\varphi_1(x_2)|\mathrm{d}x_2\int|\varphi_2(x_1)|\mathrm{d}x_1$$

显然成立.

设此命题对 $n=k$ 已成立，现在对 $n=k+1$ 证 (5.1). 事实上，

$$\int_{\mathbb{R}^{k+1}}\prod_{j=1}^{k+1}|\varphi_j(x_j')|^{\frac{1}{k}}dx_1\cdots dx_{k+1}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^k}\left[\int_{\mathbb{R}^1}\prod_{j=1}^{k}|\varphi_j(x_j')|^{\frac{1}{k}}dx_{k+1}\right]|\varphi_{k+1}(x_{k+1}')|^{\frac{1}{k}}dx_{k+1}'$$

$$\leqslant\left\{\int_{\mathbb{R}^k}\left[\int_{\mathbb{R}^1}\prod_{j=1}^{k}|\varphi_j(x_j')|^{\frac{1}{k}}dx_{k+1}\right]^{\frac{k}{k-1}}dx_{k+1}'\right\}^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\times\left\{\int_{\mathbb{R}^k}|\varphi_{k+1}(x_{k+1}')|dx_{k+1}'\right\}^{\frac{1}{k}}. \tag{5.2}$$

再用 Hölder 不等式，

$$\int_{\mathbb{R}^1}\prod_{j=1}^{k}|\varphi_j(x_j')|^{\frac{1}{k}}dx_{k+1}$$

$$\leqslant\prod_{j=1}^{k}\left(\int_{\mathbb{R}}|\varphi_j(x_j')|dx_{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

代入(5.2)，于是(5.2)的左边小于或等于

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{j=1}^{k}\left(\int_{\mathbb{R}^1}|\varphi_j(x_j')|dx_{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}dx_{k+1}'\right\}^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\times\left\{\int_{\mathbb{R}^k}|\varphi_{k+1}(x_{k+1}')|dx_{k+1}'\right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$\leqslant\prod_{j=1}^{k}\left(\int_{\mathbb{R}^k}|\varphi_j(x_j')|dx_j'\right)^{\frac{1}{k}}\left\{\int_{\mathbb{R}^k}|\varphi_{k+1}(x_{k+1}')|dx_{k+1}'\right\}^{\frac{1}{k}}$$

$$=\prod_{j=1}^{k+1}\left(\int_{\mathbb{R}^k}|\varphi_j(x_j')|dx_j'\right)^{\frac{1}{k}}.$$

引理 5.2　设 $u\in W_p^1(\mathbb{R}^n)$.

1°　设 $p>n$, $0<\mu\leqslant 1-\dfrac{n}{p}$, 则 $u\in C^{0,\mu}(\mathbb{R}^n)$, 且

$\|u\|_{C^{0,\mu}}\leqslant C\|\nabla u\|_{L^p}$, C 依赖于 $\operatorname{supp} u$.

2°　设 $p<n$, $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{n}$, 则 $u\in L^r(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|u\|_{L^r}\leqslant C\|\nabla u\|_{L^p}.$$

证明　1°　$\forall u\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 有下列表示：

$$u(x)=-\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial t}u(x+t\omega)dt,$$

其中 $\omega\in\mathbb{R}^n$, $\|\omega\|=1$. 对一切方向 ω 求平均得

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int t^{1-n}\frac{\partial}{\partial t}u(y)\mathrm{d}y \quad (y=x+t\omega)$$

$$=-\frac{1}{\omega_n}\int\frac{\nabla u(y)\cdot\omega}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y,$$

其中 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面的面积. 从而有

$$|u(x)|\leqslant\frac{1}{\omega_n}\int\frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\frac{1}{\omega_n}\left(\int_{\operatorname{supp}u}\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^{(n-1)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int|\nabla u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C(\operatorname{supp}u)\left(\int|\nabla u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}},$$

并且 $\forall x,\ y\in\mathbb{R}^n$, 设 $\sigma=|x-y|<1$, 取

$$\hat{x}=\frac{x+y}{2},\quad \forall z\in B\left(\hat{x},\ \frac{\sigma}{2}\right)\text{有}$$

$$u(x)=u(z)+\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}u(x+t(z-x))\mathrm{d}t,$$

所以 $$|u(x)-u(z)|\leqslant\sigma\int_0^1|\nabla u(x+t(z-x))|\mathrm{d}t.$$

因此有常数 C_n 与 C_n' 使得:

$$\left|u(x)-\frac{n}{\omega_n\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n}\int_{B\left(\hat{x},\frac{\sigma}{2}\right)}u(z)\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant\frac{n}{\omega_n\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n}\int_{B\left(\hat{x},\frac{\sigma}{2}\right)}^{dz}|u(x)-u(z)|\mathrm{d}z$$

$$\leqslant\frac{C_n}{\sigma^{n-1}}\int_{B\left(\hat{x},\frac{\sigma}{2}\right)}\mathrm{d}z\int_0^1|\nabla u(x+t(z-x))|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{C_n}{\sigma^{n-1}}\int_0^1 t^{-n}\mathrm{d}t\int_{B(x,t\sigma)}|\nabla u(z)|\mathrm{d}z$$

$$\leqslant\frac{C_n}{\sigma^{n-1}}\left(\int|\nabla u(z)|^p\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^1\mathrm{Vol}(B(x,\ t\sigma))^{\frac{1}{p'}}\cdot t^{-n}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C_n'\,\sigma^{1-\frac{n}{p}}\left(\int|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

同理对 y 也有

$$\left|u(y)-\frac{n}{\omega_n\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n}\int_{B\left(\hat{x},\frac{\sigma}{2}\right)}u(z)\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant C_n'\sigma^{1-\frac{n}{p}}\left(\int|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

所以 $$|u(x)-u(y)|\leqslant 2C_n'|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\left(\int|\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

这就证明了 $u\in C^{0,\mu}$.

现在来证结论 2°.

(a) $p=1$ 时 $\left(r=\frac{n}{n-1}\right)$，因为

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}u(y,x_1')\mathrm{d}y=-\int_{x_1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_1}u(y,x_1')\mathrm{d}y,$$

所以 $$|u(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}u(y,x_1')\right|\mathrm{d}y,$$

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}\prod_{j=1}^{n}\left(\int_{R^1}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u(x_1,\cdots,y,\cdots,x_n)\right|\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

从而应用引理 5.1 得

$$\|u\|_{L^r}\leqslant\frac{1}{2}\left\{\int_{R^n}\prod_{j=1}^{n}\left(\int_{R^1}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u(x_1,\cdots,y,\cdots,x_n)\right|\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{n-1}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{n}\left(\int_{R^n}\left|\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)\right|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^1(R^n)}.$$

(b) $p>1$ 时，令

$$v=|u|^{\left(1-\frac{1}{n}\right)r},$$

则 v 可微，且

$$\nabla v=\left(1-\frac{1}{n}\right)r|u|^{\left(1-\frac{1}{n}\right)r-1}\operatorname{sgn}u\cdot\nabla u.$$

利用情况(a)得

$$\|v\|_{L^{\frac{n}{n-1}}}\leqslant\frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^1}\leqslant\frac{c}{2}\|\nabla u\|_{L^p}\|u^{\left(1-\frac{1}{n}\right)r-1}\|_{L^{p'}},$$

即得$\left(因\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)r-1\right]p'=r\right)$

$$\|u\|_{L^r}\leqslant\frac{c}{2}\|\nabla u\|_{L^r}.$$

定理 5.1(嵌入定理) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界的具有 l 可延拓性质的开区域,设 $1\leqslant p,\ r<\infty,\ l\geqslant m\geqslant 0$ 都是整数, $r\in(0,1]$ 则有

(1) 当 $\frac{1}{p}\leqslant\frac{1}{r}+\frac{l-m}{n}$ 时, $W_p^l(\Omega)\to W_r^m(\Omega)$ 的嵌入映射是连续的,如果将$\leqslant$换成$<$,则这映射还是紧的.

(2) 当 $\frac{1}{p}\leqslant\frac{l-r-m}{n}$ 时, $W_p^l(\Omega)\to C^{m,r}(\overline{\Omega})$ 是连续的,而将$\leqslant$换成$<$时,它还是紧的.

证明 1° 由于区域 Ω 是 l 可延拓的,所以关于嵌入映射连续性的结论,可放到 $\mathbb{R}^n$ 上去讨论. 这是因为

$$\begin{aligned}\|u\|_{W_r^m(\Omega)}&\leqslant C_{m,r}\|Tu\|_{W_r^m(\mathbb{R}^n)}\\&\leqslant C_{m,r,l,p}\|Tu\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)}\quad(\text{如果在 }\mathbb{R}^n\text{ 上已建立了})\\&\leqslant C'_{m,r,l,p}\|u\|_{W_p^l(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

2° 在 $\mathbb{R}^n$ 上,应用引理 5.2,对 l 逐次递推,立得本定理中一切连续嵌入结论.

3° (2) 中当用$<$换$\leqslant$时,嵌入的紧性是由于 $\overline{\Omega}$ 是有界闭集,而 $C^{m,r_0}(\overline{\Omega})$ 中的有界集是 $C^{m,r}(\overline{\Omega})$ 中的紧集,当 $r<r_0$ (Arzela-Ascoli).

4° 对 l 逐次递推,只需证:当 $\frac{1}{r}>\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$ 时, $W_p^1(\Omega)\to L^r(\Omega)$ 的嵌入是紧的,就够了. 又因为 Ω 是有界可延拓的,所以有 $T: W_p^1(\Omega)\to W_p^1(\mathbb{R}^n)$ 线性连续,满足 $Tu|_\Omega=u$. 取 $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,设其支集在大球 B 内,但 $\varphi|_\Omega=1$, $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi,\partial B)=\delta>0$. 令

$$T_\varphi: u\mapsto\varphi\cdot Tu,$$

则 $T_\varphi: W_p^1(\Omega)\to\mathring{W}_p^1(B)$ 是线性连续的.

我们先对 $r=1$ 的特殊情形证明 $W_p^1(\Omega)\to L^r(\Omega)$ 的嵌入是紧

的．

设 A 是 $W^1_p(\Omega)$ 中的有界集，则 $T_\varphi(A)$ 是 $\mathring{W}^1_p(B)$ 中的有界集，而且有公共的紧支集．令

$$u_\epsilon(x)=\epsilon^{-n}\int_B\rho\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y\quad\forall u\in T_\varphi(A),\tag{5.3}$$

其中 $0<\epsilon<\delta$，而 $\rho\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，$\rho(x)=0$ 当 $|x|\geqslant1$，$\int\rho(x)\,\mathrm{d}x=1$．记 $T_\varphi(A)_\epsilon$ 为按(5.3)式定义的一切 u_ϵ 组成的集合．则

(1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}T_\varphi(A)_{\frac{\delta}{n}}$ 在 $L^1(B)$ 中可以任意逼近 $T_\varphi(A)$．

这是因为

$$\begin{aligned}&\int_B|u_\epsilon(x)-u(x)|\,\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\int_B\int_{|z|<1}\rho(z)|u(x)-u(x-\epsilon z)|\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\int_B\int_{|z|<1}\rho(z)\int_0^{\epsilon|z|}\left|\frac{\partial}{\partial t}u(x-t\omega)\right|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,\ \omega=\frac{z}{|z|}\\&\quad\leqslant\epsilon\int_B|\nabla u|\mathrm{d}x\leqslant\epsilon\mathrm{Vol}(B)^{p'}\|u\|_{\mathring{W}^1_p(B)}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

(2) $T_\varphi(A)_\epsilon$ 是 $L^1(B)$ 中的一个准紧的集合($\forall\epsilon>0$)．

这是因为

$$|u_\epsilon(x)|\leqslant\int_{|z|<1}\rho(z)|u(x-\epsilon z)|\,\mathrm{d}z\leqslant\sup|\rho|\,\|u\|_{L^1}$$

$$|\nabla u_\epsilon(x)|\leqslant\int_{|z|<1}|\nabla\rho(z)|\,|u(x-\epsilon z)|\,\mathrm{d}z\leqslant\sup|\nabla\rho|\,\|u\|_{L^1}.$$

所以 $T_\varphi(A)_\epsilon$ 是 $C^0(\bar{B})$ 的一个有界、等度连续子集．由 Arzela-Ascoli 定理，$T_\varphi(A)_\epsilon$ 在 $C^0(\bar{B})$ 中准紧，当然在 $L^1(\bar{B})$ 中准紧．

注意到　$T_\varphi u|_\Omega=\varphi Tu|_\Omega=u,$

所以 $T_\varphi(A)$ 在 $L^1(B)$ 中准紧蕴含了 A 在 $L^1(\Omega)$ 中准紧．

最后，对任意 r 满足 $\frac{1}{r}>\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$，注意到

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^r}&\leqslant\|u\|^\lambda_{L^1}\cdot\|u\|^{1-\lambda}_{L^{\frac{np}{n-p}}}\qquad\lambda+(1-\lambda)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{r}.\\&\leqslant\|u\|^\lambda_{L^1}(C\|\nabla u\|_{L^p})^{1-\lambda},\end{aligned}\tag{5.5}$$

联合不等式(5.4)与(5.5), 即得 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(T_\varphi(A))_{\frac{\delta}{n}}$ 在 $L^r(B)$ 中可以任意逼近 $T_\varphi(A)$; 从而 $T_\varphi(A)$在 $L^r(B)$中准紧. 即得 A 在 $L^r(\Omega)$中准紧.

定理 5.2(Poincare 不等式) 设 $u\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$, 其中 Ω 有界, 则

$$\left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(\Omega)\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明 设 $u\in \mathscr{D}(\Omega)$, 并在 Ω 外补设 $u=0$, 则

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} u(t,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mathrm{d}t.$$

应用 Hölder 不等式得

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(\Omega)\left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $C(\Omega)$依赖于 Ω 的直径.

推论 5.1 对于有界的 Ω, 若 $u\in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$, 则有常数 $C(\Omega,\ m)$ 使得

$$\|u\|_{W_p^m} \leqslant C(\Omega,\ m)\sum_{|\alpha|=m}\left(\int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

定理 5.3(Gagliardo-Nirenberg 不等式) 设 $1<p<n$, Ω 是 1-可延拓的有界开集. 而 $u\in W_p^1(\Omega)\cap L^s(\Omega)$, 则

$$\forall r\in\left[s,\ \frac{np}{n-p}\right],$$

必有 $u\in L^r(\Omega)$, 且

$$\|u\|_{L^r} \leqslant C_\alpha \|u\|_{L^s}^{\alpha}\|\nabla u\|_{L^p}^{1-\alpha},$$

其中 C_α 是一常数, 而

$$\frac{1}{r}=\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1-\alpha}{s}.$$

证明 由嵌入定理, $u\in L^q\cap L^s$, 其中

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}.$$

再由 Hölder 不等式得

$$\left(\int_\Omega |u|^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{\alpha}{q}} \left(\int_\Omega |u|^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1-\alpha}{s}}$$
$$\leqslant C_\alpha \|\nabla u\|_{L^p}^\alpha \|u\|_{L^s}^{1-\alpha}.$$

5.3 可微泛函

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}: \Omega \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^1$ 是一个 Caratheodory 函数，其中 l 是指标集 $I = \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mid \alpha_i \geqslant 0$ 整数, $i = 1, \cdots, n;\ |\alpha| \leqslant m\}$ 的个数. 如果设

$$|\mathbf{f}(x, y_0, \cdots, y_m)| \leqslant C\left(1 + \sum_{k=0}^{m} |y_k|^{\sigma_k}\right),$$

其中 C 是一个常数，而 $y_k \in \mathbb{R}^{n_k}$，其中 n_k 是 $I_k = \{\alpha \in I \mid |\alpha| = k\}$ 的个数，

$$\sigma_k < \frac{1}{s}\left\{\frac{1}{p} - \frac{m-k}{n}\right\}^{-1},\ 1 < s,\ p < +\infty, \tag{5.6}$$

则由本章注 1.1，以及嵌入定理，微分算子 $\mathbf{f}(x, \partial^\alpha u)$ 定义了 $W_p^m(\Omega) \to L^s(\Omega)$ 的有界连续算子.

这样的算子 $\mathbf{f}(x, \partial^\alpha u)$，因其中的指标 α 满足: $|\alpha| \leqslant m$. 称为 m 阶微分算子.

设 $\mathbf{f}$ 关于变量 $y_0, \cdots, y_m$ 还是连续可微的，并且这些偏导数关于这些变量还满足一定的增涨性限制. 那么限制在适当空间 $H_0^m(\Omega)$ 上的泛函

$$J(u) = \int_\Omega \mathbf{f}(x, \partial^\alpha u) \mathrm{d}x \tag{5.7}$$

是 F-可微的，不难算出它的 Frechet 导数:

$$\langle \mathrm{d}J(u), v \rangle = \int_\Omega \sum_{|\beta| \leqslant m} \mathbf{f}_\beta(x, \partial^\alpha u(x)) \partial^\beta v(x) \mathrm{d}x,$$

其中 $\mathbf{f}_\beta$ 是 $\mathbf{f}$ 关于 y_β 的偏导数. 为了不把符号弄得过于复杂，仅以 $m=1$, $p=2$ 为例.

例 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $F: \Omega \times (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}) \to \mathbb{R}^1$ 满足 Caratheodory 条件，对 a. e. $x \in \Omega$, $F(x, \cdots)$ 是 C^1 函数

$$|F_p(x, u, p)| \leqslant C(b_1(x) + |u|^{\frac{n}{n-2}} + |p|),$$

$$|F_u(x, u, p)| \leqslant C(b_2(x) + |u|^{\frac{n+2}{n-2}} + |p|^{\frac{2+n}{n}}),$$

其中 $C>0$ 是常数，而 $b_1 \in L^2(\Omega)$，$b_2 \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$；则

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), \nabla u(x))\mathrm{d}x$$

是 $H^1(\Omega)^N$ 上的 C^1-泛函，并且

$$\langle \mathrm{d}J(u), v\rangle = \int \sum_{i=1}^N \Big[F_{u_i}(x, u(x), \nabla u(x))v_i(x)$$

$$+\sum_{j=1}^n F_{p_{ij}}(x, u(x), \nabla u(x))\partial_{x_j}v_i(x)\Big]\mathrm{d}x,$$

其中 $u=(u_1, \cdots, u_N)$。

证明 先计算 Gateaux 导数：

$$\mathrm{d}J(u, v) = \lim_{t\to+0}\int_\Omega t^{-1}[F(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v)$$

$$-F(x, u, \nabla u)]\mathrm{d}x.$$

在积分号内用中值定理. 对 a. e. $x\in\Omega$，有 $0<\xi(x)<1$，使

$$t^{-1}[F(x, u+tv, \nabla u+t\nabla v) - F(x, u, \nabla u)]$$

$$=\sum_{i=1}^N [F_{u_i}(x, u(x)+\xi(x)tv(x), \nabla u(x)$$

$$+\xi(x)t\nabla v(x))v_i(x)$$

$$+\sum_{j=1}^n F_{p_{ij}}(x, u(x)+\xi(x)tv(x), \nabla u(x)$$

$$+\xi(x)t\nabla v(x))\partial_{x_j}v_i(x)].$$

再由嵌入定理：$H^1(\Omega)\to L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$，以及 Lebesgue 控制定理，得

$$\mathrm{d}J(u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \Big[F_{u_i}(x, u(x), \nabla u(x))v_i(x)$$

$$+\sum_{j=1}^n F_{p_{ij}}(x, u, \nabla u)\partial_{x_j}v_i\Big]\mathrm{d}x.$$

为了验证这个 Gateaux 导数关于 u 是连续的，作对应

$$u\mapsto \xi_0 = \mathscr{F}(u) = (F_{u_i}(x, u, \nabla u), F_{p_{ij}}(x, u(x), \nabla u(x))).$$

它将 $H^1(\Omega)^N$ 连续地映入空间 $L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)^n\times L^2(\Omega)^{nN}$. 再由 Riesz 表示定理及嵌入定理，有 $\aleph\in\mathscr{L}(L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)^n\times L^2(\Omega)^{nN}, H^1(\Omega)^N)$,

使得 $\forall\xi=\{w_i,\ t_{ij}\}\in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)^n\times L^2(\Omega)^{nN}, \forall v\in H^1(\Omega)^N$，都有

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left[w_iv_i+\sum_{j=1}^N t_{ij}\partial_{x_j}v\right]\mathrm{d}x=(v,\ \mathbb{K}\xi)_{H^1}$$

于是，
$$\mathrm{d}J(u,\ v)=(v,\ \mathbb{K}\mathscr{F}(u)).$$

再按复合算子的连续性以及嵌入定理，得到 $\mathscr{F}$ 连续，从而 $\mathbb{K}\mathscr{F}$ 在 $H^1(\Omega)^N$ 上连续，故 J 是 C^1 泛函，且

$$J'(u)(v)=\mathrm{d}J(u,\ v).$$

(5.7)中的泛函 J 的导算子诱导出一个 $2m$ 阶微分算子

$$A(x,\ \partial)u=\sum_{|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\beta|}\partial^\beta\mathbf{f}_\beta(x,\ \partial^\alpha u)\quad |\alpha|\leqslant m. \tag{5.8}$$

称 A 是椭圆的，如果 $\forall\xi,\ \eta\in\mathbb{R}^n,\ \forall x\in\bar{\Omega}$ 有

$$\sum_{\substack{|\beta|=m\\|\gamma|<m}}(\mathbf{f}_\beta(x,\ \xi^\gamma,\ \xi^\beta)-\mathbf{f}_\beta(x,\ \eta^\gamma,\eta^\beta))(\xi^\beta-\eta^\beta)>0, \tag{5.9}$$

这里 $\xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n),\ \eta=(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n)$，而 $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$，其中 $\alpha=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)$.

特别地，设 $(a_{ij}(x))$ 是 $\bar{\Omega}$ 上定义的连续正定矩阵，$c\in C(\bar{\Omega})$；则

$$A=-\sum_{i,j=1}^n\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j})+c(x) \tag{5.10}$$

便是由二次泛函

$$J(u)=\int_\Omega\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\partial_{x_i}u\partial_{x_j}u+c(x)u^2\right)\mathrm{d}x \tag{5.11}$$

为微商导出的一个二阶线性椭圆型微分算子.

5.4 流形上的 Соболев 空间

设 M 是一个 n 维光滑紧流形，函数 u 称为是 $C^k(M)$（或 $L^p_{loc}(M)$）的（k 是正整数，$(1\leqslant p\leqslant+\infty)$），是指对于 M 的任意一个坐标系 $\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$，函数 $u\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是 $C^k(\varphi_\alpha(U_\alpha))$（或 $L^p_{loc}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$）的，$\forall\alpha\in\Lambda$.

不难验证：为了 $u\in C^k(M)$（或 $L^p_{loc}(M)$），只要对于一个坐标系 $\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$，有 $u\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是 C^k（或 L^p_{loc}）的，$\forall\alpha\in\Lambda$，就够了.

这是因为：设 Ω_1, Ω_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个开集，而 ψ 是 $\Omega_1\to\Omega_2$ 的 C^∞ 微分同胚．那么

$$u\in C^k(\Omega_2)\Leftrightarrow u\circ\psi\in C^k(\Omega_1);$$

并且在 Ω_2 的任意一个紧子集 Ω_2' 上，

$$\|u\|_{C^k(\Omega_2')} \text{ 与 } \|u\circ\psi\|_{C^k(\psi^{-1}(\Omega_2'))} \text{ 等价},$$

（锁链法则）．

类似地，我们可以定义 M 上的Соболев空间 $W_p^l(M)$．为此我们要知道广义微商在微分同胚下的锁链法则．注意下式：设 $u\in\mathscr{D}'(\Omega_2)$, $\varphi\in C_0^\infty(\Omega_1)$, $\psi: \Omega_1\to\Omega_2$ 是 C^∞ 微分同胚；则

$$\langle u\circ\psi,\ \varphi\rangle_{\Omega_1}=\langle u,\ \det|\psi'|\cdot(\varphi\circ\psi^{-1})\rangle_{\Omega_2}. \tag{5.12}$$

于是有锁链法则：

$$\partial_j(u\circ\psi)=\sum_{k=1}^{n}(\partial_j\psi_k)((\partial_k u)\circ\psi),\quad j=1,\ \cdots,\ n, \tag{5.13}$$

其中 $\psi(x)=(\psi_1(x),\ \cdots,\ \psi_n(x))$．类似地，还有

$$(\varphi\cdot u)\circ\psi=(\varphi\circ\psi)\cdot(u\circ\psi)\quad \forall\varphi\in C^\infty(\Omega_2).$$

利用等式(5.12)便可以定义流形 M 上的广义函数．由于

$$u\in\mathscr{D}'(\Omega_2)\Leftrightarrow u\circ\psi\in\mathscr{D}'(\Omega_1),$$

并且映射 $\mathscr{D}'(\Omega_2)\ni u\mapsto u\circ\psi\in\mathscr{D}'(\Omega_1)$是连续的．

于是导出

定义 5.2 设 M 是一个 C^∞ 紧 n 维流形．若对它的任意坐标系 $\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)|\alpha\in A\}$，给定 $u_\alpha\in\mathscr{D}'(\varphi_\alpha(U_\alpha))$满足：

$$u_{\alpha'}=u_\alpha\circ(\varphi_\alpha\circ\varphi_{\alpha'}^{-1})\quad \text{于}\quad \varphi_{\alpha'}(U_\alpha\cap U_{\alpha'}),\ \forall\alpha,\ \alpha'\in A;$$

则称 $\{u_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 M 上的一个广义函数 u．M 上一切广义函数记作 $\mathscr{D}'(M)$．

再利用锁链法则(5.13)，我们不难验证：

$$u\in W_p^l(\Omega_2)\Leftrightarrow u\circ\psi\in W_p^l(\Omega_1),$$

其中 $l\in\mathbb{Z}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$；并且

$\|u\|_{W_p^l(\Omega_2)}$ 与 $\|u\circ\psi\|_{W_p^l(\Omega_1)}$ 是等价的．

这便引向

定义 5.3 设 M 是一个 C^∞ 紧 n 维流形，$u\in\mathscr{D}'(M)$ 称为是

$W_p^l(M)$元素，是指对于 M 的任意一个坐标系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$，都有 $u_\alpha=u|_{U_\alpha}\in W_p^l(\varphi_\alpha(U_\alpha))$, $\forall\alpha\in\Lambda$, 这里 $l\in\mathbb{Z}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

由定义 5.3 显然可见：若将定理 5.1 中的 Ω 换成紧光滑流形 M, 则一切结论也都成立.

§ 6　三个微分算子

在这一节，我们介绍三个线性微分算子：Laplace 算子 $-\Delta$, 一维波算子 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 以及 Hamilton 算子 $J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$; 它们分别出现在半线性椭圆边值问题、半线性波动方程周期解问题，以及 Hamilton 组的周期解问题之中. 因为这些问题将经常作为临界点理论应用的例证，所以弄清这三个微分算子的基本性质就显得相当重要.

6.1　Laplace 算子

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个具有足够光滑边界的有界开区域. 又设 $(a_{ij}(x))$是 $\bar\Omega$ 上的 C^∞ 一致正定矩阵. $a\in C^\infty(\bar\Omega)$. 记 L 为下列微分算子：

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^n\partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u)+a(x)u,$$

连同边界条件：L 的定义域 $D(L)\subset H_0^1(\Omega)$.

Laplace 算子 $-\Delta$ 就是它的一个例子(连同 0 边值).

下面两个重要的不等式分别称为二阶椭圆算子的 L^p 估计与 Hölder 估计，它们是线性椭圆方程理论的基石.

定理 (Agmon, Douglise, Nirenberg 参看 [ADN1]) 设 $1<p<\infty$, 又设 $u\in W_p^2\cap\mathring{W}_p^1(\Omega)$; 则有常数 C_1, $C_2>0$, 依赖于 L 的系数，区域 Ω, 以及 p, 使得

$$\|u\|_{W_p^2}\leqslant C_1\|Lu\|_{L^p}+C_2\|u\|_{L^p},$$

此外，当 $\ker(L)\triangleq\{u\in W_p^2\cap\mathring{W}_p^1(\Omega)\,|\,Lu=0\}=\{\theta\}$ 时，$C_2=0$.

定理(Schauder 参看[GT 1]) 设 $0<r<1$, 又设 $u\in C^{2,r}(\bar\Omega)$

满足 $u|_{\partial\Omega}=0$; 则有常数 $C_1, C_2>0$, 依赖于 L 的系数, 区域 Ω, 以及 r, 使得

$$\|u\|_{C^{2,r}(\overline{\Omega})}\leqslant C_1\|Lu\|_{C^{0,r}(\overline{\Omega})}+C_2\|u\|_{C^{0,r}(\overline{\Omega})}.$$

此外, 当 $\ker(L)=\{u\in C^{2,r}(\overline{\Omega})\,|\,u|_{\partial\Omega}=0,\ Lu=0\}=\{\theta\}$ 时, $C_2=0$.

从这两个定理可见, $L: W_p^2\cap \mathring{W}_p^1(\Omega)\to L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$, $C^{2,r}\cap C_0(\overline{\Omega})\to C^{0,r}(\overline{\Omega})$, $0<r<1$, 是 Fredholm 算子; 并且当 $\ker(L)=\{\theta\}$ 时, 按嵌入定理, L^{-1} 还是 $L^p(\Omega)$(与 $C^{0,r}(\overline{\Omega})$)到自身的全连续线性算子.

特别地, 当 $p=2$ 时, 以 $W_2^2\cap\mathring{W}_2^1(\Omega)$ 为定义域的线性算子 L 是自伴的(参看[Ag 1]).

当 $a\geqslant 0$ 时, L 正定, 从而 $\mathbb{K}=L^{-1}$ 存在.

下列关系常常遇到: $L^2(\Omega)$上的内积

$$\left|\int u\cdot v\right|\leqslant\left(\int|u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int|v|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\left(\int|u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\quad\text{(Poincaré)}$$

其中 $C>0$ 是一个常数$\left(\text{实际上 } C=\frac{1}{\lambda_1},\text{ 其中 } \lambda_1 \text{ 是 } -\Delta \text{ 在 0 边值下的第一本征值}\right)$, $\forall u\in L^2(\Omega)$, $v\in H_0^1(\Omega)$.

按 Riesz 表示定理, 存在 $K\in\mathscr{L}(L^2, H_0^1)$使得

$$\int u\cdot v=(Ku, v)_{H_0^1}\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

其实这个 K 就是 $\mathbb{K}=(-\Delta)^{-1}$, 因为

$$\int u\cdot v=\int -\Delta\mathbb{K}u\cdot v$$

$$=\int\nabla\mathbb{K}u\cdot\nabla v=(\mathbb{K}u, v)_{H_0^1}.$$

于是 K 作为 $H_0^1(\Omega)$到自身的自伴全连续算子有谱, $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\mu_3\geqslant\cdots\geqslant\mu_n\geqslant\cdots\to 0$. 由此可见 L 有谱 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots\to$

$+\infty$，其中 $\lambda_i=\dfrac{1}{\mu_i}$，$i=1, 2\cdots$. 再按 Крейн-Рутман 定理[Kre 1]和二阶椭圆算子的极大值原理，λ_1 是单重的，并且对应着一个正的本征函数 $\varphi_1(x)>0$.

6.2 波算子 $\Box=\partial^2 t-\partial^2 x$

现在在矩形

$$Q=[0, 2\pi]\times[0, \pi]$$

上考察波动算子 $\partial^2 t-\partial^2 x$, $(t, x)\in Q$. 为此记

$$\Box: u\mapsto \partial_t^2 u-\partial_x^2 u,$$

带有定义域：

$$\mathscr{D}(\Box)=\{u\in C^\infty(Q)\,|\,u(t, 0)=u(t, \pi)=0\quad \forall t\in[0, 2\pi]\}.$$

易见 $\Box$ 是 $L^2(Q)$上的一个对称稠定线性算子

$$\begin{aligned}&\int_Q \Box u\cdot v\\ &=\int_Q u\cdot\Box v-\int_0^{2\pi}[\partial_x u(t, \cdot)v(t, \cdot)|_0^\pi\\ &\quad -u(t, \cdot)\partial_x v(t, \cdot)|_0^\pi]dt\\ &=\int_Q u\cdot\Box v\quad \forall u, v\in\mathscr{D}(\Box)\end{aligned}$$

对于 $L^2(Q)$ 上的任意元 u，有 Fourier 级数表示

$$u\sim\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}c_{jk}e^{ijt}\sin kx,\ \sum_k\sum_j|c_{jk}|^2<\infty.$$

为方便，用 $\{c_{jk}\}$ 表示 u，记作

$$u\leftrightarrow\{c_{jk}\}\in l^2.$$

显然有

$$\Box u\leftrightarrow\{(k^2-j^2)c_{jk}\},$$

从而$\Box$有一个自伴扩张 A：

$$\mathscr{D}(A)=\{u\leftrightarrow\{c_{jk}\}\,|\,\sum_k\sum_j(1+(k^2-j^2)^2)|c_{jk}|^2<\infty\}.$$

以下用 $\mathfrak{N}(A)$ 表 $\ker(A)$，$\mathscr{R}(A)$ 记 $\mathrm{Im}(A)$.

$$\mathfrak{N}(A)=\Big\{u\leftrightarrow\{c_{jk}\}\,|\,c_{jk}=0\text{ 当 }|j|\neq k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{k,k}|^2+|c_{-k,k}|^2<+\infty\Big\},$$

$$\mathscr{R}(A)=\{u\leftrightarrow\{c_{jk}\}\,|\,c_{jk}=0\text{ 当 }|j|=k,\ u\in L^2(Q)\},$$

从而 $\mathscr{R}(A)$是闭集，此外 A 有谱

$$\sigma(A)=\{k^2-j^2\,|\,k=1,\ 2\cdots;\ j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\},$$

在 $\mathscr{R}(A)$上，A 有逆算子 $K=A^{-1}$：

$$K:u\mapsto Ku\leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{c_{jk}}{k^2-j^2}, & \text{当 }|j|\neq k,\\ 0, & \text{当 }|j|=k.\end{cases}$$

我们来研究线性算子 K 在各函数空间上的有界性.

引理 6.1 设 $u\in L^2(Q)$，$u=\sum\limits_k\sum\limits_j c_{jk}e^{ijt}\sin kx$；则为了 $u\in H_0^1(Q)$必须且仅须

$$\sum_k\sum_j|c_{jk}|^2(|j|^2+|k|^2)<+\infty.$$

更确切地，
$$\|u\|=\Big(\sum_k\sum_j|c_{jk}|^2(|j|^2+|k|^2)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

是$\|\cdot\|_{H_0^1(Q)}$的一个等价模.

证明 注意到

$$\partial_t u=i\sum_k\sum_j c_{jk}je^{ijt}\sin kx,$$

$$\partial_x u=\sum_k\sum_j c_{jk}ke^{ijt}\cos kx;$$

所以由 Parseval 定理，

$$\int_Q(\partial_t u)^2+(\partial_x u)^2=\sum_k\sum_j|c_{jk}|^2(|j|^2+|k|^2).$$

引理 6.2 设 $f\in\mathfrak{N}(A)^{\perp}=\mathscr{R}(A)$，则

$$\|Kf\|_{H_0^1}\leqslant\|f\|_{L^2}.$$

证明 设 $\mathbf{f}=\sum\limits_k\sum\limits_j f_{jk}e^{ijt}\sin kx$，则 $\mathbf{f}_{jk}=0$，当 $|j|=k$. 令

$$u=K\mathbf{f}=\sum_k\sum_j u_{jk}e^{ijt}\sin kx,$$

则有

$$u_{jk}=\mathbf{f}_{jk}/(k^2-j^2),$$

从而 $\sum_k\sum_j |u_{jk}|^2(|j|^2+|k|^2)\leqslant\sum_k\sum_j \frac{(|j|^2+|k|^2)}{|k^2-j^2|^2}|\mathbf{f}_{jk}|^2$.

注意到

$$\frac{|j|^2+|k|^2}{|j^2-k^2|^2}=\frac{|j|^2+|k|^2}{(|j|+k)^2(|j|-k)^2}\leqslant 1,\ 当\ ||j|-k|\geqslant 1,$$

所以有
$$\|u\|_{H_0^1}\leqslant\|\mathbf{f}\|_{L^2}.$$

推论 6.1 设 $\mathbf{f}\in\mathfrak{N}(A)^{\perp}$, 则

$$\|K\mathbf{f}\|_{H^{k+1}}\leqslant\|\mathbf{f}\|_{H^k},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

同理.

以下讨论解的更高的正则性，先刻划集合 $\mathfrak{N}(\Box)$ 的构造.

波方程
$$\Box u=0$$

的通解是众所周知的:

$$\psi(t,\ x)=p(t+x)+q(t-x),$$

其中 p, q 是两个任意函数. 由边条件

$$\psi(t,\ 0)=\psi(t,\ \pi)=0$$

导出
$$\begin{cases}p(t)+q(t)=0,\\ p(t+\pi)+q(t-\pi)=0.\end{cases}$$

合起来便是
$$\begin{cases}q(t)=-p(t),\\ p(t+\pi)=p(t-\pi).\end{cases}$$

由此可见，p 是一个 2π 周期函数，并且有

$$\psi(t,\ x)=p(t+x)-p(t-x).$$

又因为 p 相差一个常数不会影响 ψ 的确定，所以不妨设

$$\int_0^{2\pi}p(t)\mathrm{d}t=0.$$

为了明确 $\mathfrak{N}(\Box)$ 中的元素 $\psi(t,\ x)$ 可以由一个一元周期函数 $p(t)$ 描写，我们需要

引理 6.3 $\forall q\in[1,\ \infty]$, 映射

$$Z:p\mapsto\psi(t,\ x)=p(t+x)-p(t-x)$$

是 Banach 空间 $S_q\triangleq\left\{p\in L^q(0,\ 2\pi)\,\middle|\,\int_0^{2\pi}p(t)\,\mathrm{d}t=0,\ 周期\right\}$ 与

$\mathfrak{N}(\square)_q \triangleq \{\psi\in L^q(Q)\,|\,\square\psi=0\}$ 间的线性同胚.

证明 验证 $Z: p\mapsto\psi$ 是 1－1 的，在上的，并且 Z^{-1} 连续.

1－1 的：设 $\psi=Zp$. 则

$$\int_0^\pi[\psi(t-x,\ x)-\psi(t+x,\ x)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi[2p(t)-p(t-2x)-p(t+2x)]\mathrm{d}x=2\pi p(t).$$

这是因为 $\displaystyle\int_0^\pi p(t\pm2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}p(s)\mathrm{d}s=0,$

所以有 $\displaystyle p(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi[\psi(t-x,\ x)-\psi(t+x,\ x)]\mathrm{d}x.$

在上的：对于 $\psi\in C_0^2(Q)$ 满足 $\square\psi=0$，按前面的推导有 $p\in S_q$ 使得 $\psi=Zp$，又按公式

$$\|p\|_{L^q(0,2\pi)}\leqslant\frac{1}{\pi}\|\psi\|_{L^q(Q)},$$

所以 Z^{-1} 是连续的. 并且由 $C_0^2(Q)$ 在 $L^q(Q)$ 稠密，Z 的值域可以扩充到 $\mathfrak{N}(\square)_q$ 上.

再看 $\mathfrak{N}(\square)_{q'}^{\perp}\cap L^q(Q)$.

引理 6.4 $\forall q\in[1,\ \infty]$，为了 $L^q(Q)$ 函数 $\mathbf{f}\in\mathfrak{N}(\square)_{q'}^{\perp}$，即

$$\int_Q \mathbf{f}\cdot\psi=0,\quad \forall\psi\in\mathfrak{N}(\square)_{q'},\tag{6.1}$$

必须且仅须

$$\int_0^\pi[\mathbf{f}(t-x,\ x)-\mathbf{f}(t+x,\ x)]\mathrm{d}x=0,\quad 对\ \text{a. e. }t\in[0,\ 2\pi].\tag{6.2}$$

证明 按引理 6.3，$\exists p\in S_{q'}$ 使得 $\psi=Zp$，于是条件(6.1)等价于

$$\int_Q \mathbf{f}(t,\ x)[p(t+x)-p(t-x)]\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=0,\quad \forall p\in S_{q'},$$

当 $\mathbf{f}$ 对 t 作 2π 周期延拓时，由 Fubini 定理及 Hölder 不等式，

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi[\mathbf{f}(t-x,\ x)-\mathbf{f}(t+x,\ x)]\mathrm{d}x\cdot p(t)\mathrm{d}t=0,\quad \forall p\in S_{q'},$$

而这又等价于

$$\int_0^\pi [\mathbf{f}(t-x,\ x)-\mathbf{f}(t+x,\ x)]\,\mathrm{d}x=\text{常数}\ c,$$

但
$$2\pi c=\int_Q [\mathbf{f}(t-x,\ x)-\mathbf{f}(t+x,\ x)]=0.$$

所以 $c=0$, 即得(6.2). 反过来, 由(6.2)推(6.1)是显然的.

现在我们来作算子 K 的 L^p 估计. 为此先把 K 解析地表达出来. 按推论 6.1, 当 $\mathbf{f}\in\mathfrak{N}(A)^\perp\cap C^\infty(\bar{Q})$ 时, 有 $u=K\mathbf{f}\in C^\infty(\bar{Q})$. 而满足方程

$$\begin{cases}\square u=\mathbf{f}(t,\ x), & (t,\ x)\in Q,\\ u(t,\ 0)=u(t,\ \pi)=0, & t\in S^1\end{cases}\tag{6.3}$$

的解之间彼此相差一个 $\mathfrak{N}(\square)$ 元素. 我们先来找出 (6.3) 的一个解 $\tilde{u}(t,\ x)$. 事实上, 由非齐次波方程的特解表达式, 我们知道

$$u_1(t,\ x)=-\frac{1}{2}\int_x^\pi \mathrm{d}y\int_{t-y+x}^{t+y-x}\mathbf{f}(s,\ y)\mathrm{d}s$$

满足波方程, 为了使它还满足边界条件

$$u(t,\ 0)=u(t,\ \pi)=0,$$

需添加一个不依赖于 t 的 x 的线性函数:

$$u_2(t,\ x)=k(\pi-x),$$

其中 k 是待定常数. 显然

$$\tilde{u}(t,\ x)=u_1(t,\ x)+u_2(t,\ x)$$

仍满足方程. 由 $u_1(t,\ \pi)=u_2(t,\ \pi)=0$ 导出 $\tilde{u}(t,\ \pi)=0$. 取

$$k=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}y\int_{t-y}^{t+y}\mathbf{f}(s,\ y)\mathrm{d}s\tag{6.4}$$

就有
$$\tilde{u}(t,\ 0)=-\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}y\int_{t-y}^{t+y}\mathbf{f}(s,\ y)\mathrm{d}s+k\pi=0.$$

又因为 $f\in\mathfrak{N}(\square)^\perp$ 满足:

$$\int_0^\pi [\mathbf{f}(t-y,\ y)-\mathbf{f}(t+y,\ y)]\,\mathrm{d}y=0,$$

所以 k 确实是一个与 t 无关的常数. 这样一来,

$$\tilde{u}(t,\ x)=k(\pi-x)-\frac{1}{2}\int_x^\pi \mathrm{d}y\int_{t-y+x}^{t+y-x}\mathbf{f}(s,\ y)\mathrm{d}s\tag{6.5}$$

就是满足方程(6.3)连同边界条件的解.

现在我们来找 $\tilde{u}(t, x)$ 在 $\mathfrak{N}(\square)^{\perp}$ 上的投影，因为只有限制在 $\mathfrak{N}(\square)^{\perp}$ 上，解才是唯一的。

为此作 $\tilde{u}(t, x)$在 $\mathfrak{N}(\square)$上的投影算子 Q:

$$Q: \tilde{u} \mapsto \psi \in \mathfrak{N}(\square), \text{ 以及 } P = id - Q.$$

注意到 $\tilde{u} - \psi \in \mathfrak{N}(\square)^{\perp}$ 等价于

$$\int_0^{\pi} [\psi(t-x, x) - \psi(t+x, x)] dx$$
$$= \int_0^{\pi} [\tilde{u}(t-x, x) - \tilde{u}(t+x, x)] dx,$$

而 $$p(t) = Z^{-1}\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\psi(t-x, x) - \psi(t+x, x)] dx,$$

所以只须取

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\tilde{u}(t-x, x) - \tilde{u}(t+x, x)] dx \tag{6.6}$$

以及

$$\psi(t, x) = p(t+x) - p(t-x) \tag{6.7}$$

就得到 $$\psi = Q\tilde{u}.$$

于是，

$$u(t, x) = \tilde{u}(t, x) - \psi(t, x) = P\tilde{u}, \tag{6.8}$$

即是方程(6.3)连同边条件的在 $\mathfrak{N}(\square)^{\perp}$ 的解，其中 $\tilde{u}$ 由等式(6.4)与(6.5)决定，而 ψ 由等式(6.6)与(6.7)决定。

由以上讨论，易见

引理 6.5 线性算子 Q 是 $L^p(Q)$上的有界投影算子，$1 \leqslant p \leqslant \infty$。

证明 $Q^2 = Q$ 是显然的。而

$$\|Q\tilde{u}\|_{L^p(Q)} = \|\psi\|_{L^p(Q)} \leqslant 2\pi \|p\|_{L^p(S^1)} \leqslant 2\|\tilde{u}\|_{L^p(Q)}.$$

引理 6.6 设 $\bar{K} = KP$，则 $\bar{K}$ 可以连续地扩张为 $L^1(Q)$ 到 $L^{\infty}(Q)$的连续线性算子。

证明 利用公式(6.5)，直接看出

$$\|\tilde{u}\|_{L^{\infty}(Q)} \leqslant \|\mathbf{f}\|_{L^1(Q)},$$

从而 $$\|Q\tilde{u}\|_{L^{\infty}} \leqslant 2\|\tilde{u}\|_{L^{\infty}} \leqslant 2\|\mathbf{f}\|_{L^1(Q)}.$$

合起来，
$$\|\tilde{K}\mathbf{f}\|_{L^\infty}=\|\tilde{u}-Q\tilde{u}\|_{L^\infty}\leqslant 3\|\mathbf{f}\|_{L^1}.$$

引理 6.7 $\tilde{K}=KP$ 可以连续地扩张为 $L^q(Q)\to C^{1-\frac{1}{q}}(\overline{Q})$，$1<q<\infty$，的连续线性算子.

证明 由 $u=\tilde{K}\mathbf{f}=\tilde{u}-\psi$ 的定义(6.8)，只需验证
$$\mathbf{f}\mapsto\int_x^\pi dy\int_{t-y+x}^{t+y-x}\mathbf{f}(s,y)ds$$
是 $L^q\to C^{1-\frac{1}{q}}$ 的连续线性算子就够了，事实上，
$$\left|\int_{x+\Delta x}^\pi dy\int_{t+\Delta t-y+x+\Delta x}^{t+\Delta t+y-x-\Delta x}\mathbf{f}(s,y)ds-\int_x^\pi dy\int_{t-y+x}^{t+y-x}\mathbf{f}(s,y)ds\right|$$
$$\leqslant\left|\int_x^{x+\Delta x}dy\int_{t-y+x}^{t+y-x}\mathbf{f}(s,y)ds\right|$$
$$+\left|\int_{x+\Delta x}^\pi dy\int_{t+y-x}^{t+\Delta t+y-x-\Delta x}\mathbf{f}(s,y)ds\right|$$
$$+\left|\int_{x+\Delta x}^\pi dy\int_{t-y+x}^{t+\Delta t-y+x+\Delta x}\mathbf{f}(s,y)ds\right|$$
$$\leqslant C_q(|\Delta x|+|\Delta t|)^{1-\frac{1}{q}}\|\mathbf{f}\|_{L^q},\quad\text{(Hölder)}$$
这就是所要证的.

总结起来，有

定理 6.1 $\tilde{K}=KP$ 可以连续地扩张为 $L^p(Q)\to C^{1-\frac{1}{p}}(\overline{Q})$，$1<p<\infty$ 的连续线性算子，从而它是 $L^p(Q)\to L^{p'}(Q)$ 的紧线性算子，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

6.3 Hamilton 算子

用 S^1 表示单位圆周 $\{e^{it}\mid t\in[0,2\pi]\}$，记 $V=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. 取实 Hilbert 空间 $L^2(S^1,V)$ 如下：$z\in L^2(S^1,V)$ 是指定义在 S^1 上，取值于 V 的平方可积向量函数，规定内积为
$$\langle z,w\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\sum_{j=1}^{2n}z_j(t)w_j(t)dt,\quad\forall z,w\in L^2(S^1,V).$$
类似地，定义 Соболев 空间 $H^1(S^1,V)$，其中的内积是
$$(z,w)=\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\sum_{j=1}^{2n}[z_j(t)w_j(t)+\dot{z}_j(t)\dot{w}_j(t)]dt.$$

引入 $2n\times 2n$ 矩阵:

$$J=\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix},$$

其中 I_n 是 $n\times n$ 单位阵. 在 $L^2(S^1, V)$ 上考察线性算子 A: $z\mapsto -J\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z$, 带有定义域 $D(A)=H^1(S^1, V)$.

为了讨论 A 的性质,我们把实空间 V 复化. 令 $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^n+i\mathbb{R}^n$, 复化过程如下: 记 $e_1, \cdots, e_{2n}$ 为 V 上的一组标准正交基. 令

$$\phi_j=e_j+ie_{j+n},\quad j=1, 2, \cdots, n.$$

它们是 $\mathbb{C}^n$ 中的一组基, 把 $z=\sum\limits_{j=1}^{2n}z_je_j$ 对应到 $\hat{z}=\sum\limits_{j=1}^{n}(z_j-iz_{j+n})\phi_j$; 并赋予内积

$$[\hat{z}, \hat{w}]=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n}(z_j-iz_{j+n})\overline{(w_j+iw_{j+n})}$$
$$=\sum_{j=1}^{n}(z_jw_j+z_{j+n}w_{j+n})=\sum_{j=1}^{2n}z_jw_j.$$

从而对应 $z\mapsto\hat{z}$ 是线性、保内积的, 并且 $\{\phi_j|j=1, \cdots, n\}$ 构成 $\mathbb{C}^n$ 的一组正交基.

引入复 Hilbert 空间 $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ 取代 $L^2(S^1, V)$, 定义内积

$$\langle\hat{z}, \hat{w}\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}[\hat{z}(t), \hat{w}(t)]\mathrm{d}t=\langle z, w\rangle,$$

则 $z(t)\mapsto\hat{z}(t)$ 还是 $L^2(S^1, V)\to L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ 的保内积线性同构.

空间 $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ 有一组标准正交基 $\{e^{-imt}\phi_j|\ j=1, 2, \cdots, n;\ m=0, \pm1, \pm2, \cdots\}$. $\forall\hat{z}\in L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ 有下列 Fourier 级数展开

$$\hat{z}=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_{jm}e^{-imt}\Big)\phi_j,$$

其中
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}|c_{jm}|^2=\|\hat{z}\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}[\hat{z}, \hat{z}]\mathrm{d}t.$$

于是
$$\hat{z}\leftrightarrow c=\{c_{jm}\}$$

建立了 $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)\to(l^2)^n=\prod\limits_{j=1}^{n}l^2$ 的等距同构.

注意到
$$-J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-imt}\phi_j)=me^{-imt}\phi_j,$$

不难验证：A 是自伴算子，而 $\{e^{-imt}\phi_j\}$ 正是它对角化的一组正交基，记

$$M(m)=\mathrm{span}\,\{e^{-imt}\phi_1,\ \cdots,\ e^{-imt}\phi_n\},\ m\in\mathbb{Z},$$

则有
$$L^2(S^1,\ \mathbb{C}^n)=\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} M(m).$$

它对应着 A 的谱分解.

用 Fourier 级数刻划与 Соболев 空间 $H^1(S^1,\ V)$ 相对应的复 Соболев 空间 $H^1(S^1,\ \mathbb{C}^n)$，不难发现 $\hat{z}\in H^1(S^1,\ V)$ 必须且仅须

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(1+|m|)^2|c_{jm}|^2<+\infty.$$

我们还有

(1) $\mathfrak{N}(A)=M(0)$, $R(A)=\mathfrak{N}(A)^{\perp}=\bigoplus_{m\neq 0} M(m)$.

(2) A^{-1}: $\mathfrak{N}(A)^{\perp}\rightarrow H^1(S^1,V)$ 是有界的，从而 A^{-1} 还是 $\mathfrak{N}(A)^{\perp}\rightarrow L^2(S^1,\ V)$ 的紧算子.

证明　设 $z\in\mathfrak{N}(A)^{\perp}$，则 $\hat{z}\leftrightarrow\{c_{jm}\}$，其中 $c_{j0}=0$, $j=1,\ \cdots,\ n$. 从而 $(A^{-1}z)^{\wedge}\leftrightarrow\left\{\frac{1}{m}c_{jm}\right\}$，便有

$$\|A^{-1}z\|_{H^1}=\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{m\neq 0}\left(1+\frac{1}{m^2}\right)|c_{jm}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{2}\,\|z\|_{L^2}.$$

定理 6.2　设 P 是到 $R(A)$ 的正交射影，$\widetilde{K}=A^{-1}P$，则 $\widetilde{K}$ 可以连续扩张为 $L^p(S^1,\ \mathbb{C}^n)\rightarrow C^{1-\frac{1}{p}}(S^1,\ \mathbb{C}^n)$ 的线性算子，$1\leqslant p<+\infty$；从而是 $L^p(S^1,\ \mathbb{C}^n)\rightarrow L^{p'}(S^1,\ \mathbb{C}^n)$ 的紧算子，其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

证明　P 有下列表达式

$$\hat{z}\mapsto\hat{z}(t)-\sum_{j=1}^{n}\int_{S^1}[\hat{z},\ \phi_j]\frac{dt}{2\pi}\cdot\phi_j,$$

从而 P 是 $L^p(S^1,\ \mathbb{C}^n)$ 到自身的有界射影算子. 记 $\hat{w}=P\hat{z}$，则

$$\langle\hat{w},\ \phi_j\rangle=0,\quad j=1,\ \cdots,\ n. \tag{6.9}$$

并且方程
$$A\hat{z}_1=-J\frac{d}{dt}\hat{z}_1=\hat{w}$$

有解 $\hat{z}_1(t)=\hat{z}_1(0)+\int_0^t J\hat{w}(s)ds$. 由 (6.9) 推得 $\hat{z}_1(0)=\hat{z}_1(2\pi)$. 适当

选择 $\hat{z}_1(0)$，使 $\int_{S^1}[\hat{z}_1, \phi_j]dt=0,\ j=1,\cdots,n$；则 $\hat{z}_1=A^{-1}P\hat{z}$. 于是，

$$\|\hat{z}_1(t+\Delta t)-\hat{z}_1(t)\|_{\mathbf{C}^n}$$

$$\leqslant\int_t^{t+\Delta t}\|J\hat{w}(s)\|ds\leqslant|\Delta t|^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}\|\hat{w}(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\hat{z}_1(0)\|_{\mathbf{C}^n}=\frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\left\|\int_0^t J\hat{w}(s)ds\right\|dt$$

$$\leqslant(2\pi)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{2\pi}\|\hat{w}(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

即得结论.

评注与参考文献

§1 关于 Banach 空间的微分学在许多教科书与专著中已有详述. 例如看: J. Dieudonne [Di 1], J. T. Schwartz [Sch 1], M. S. Berger [Ber 1], H. Cartan [Car 1] S. Lang [La 1].

1.1 关于 Немыцкий 算子的连续性, 参看 M. A. Красносельский[Kr 1], Вайнберг [Va 1], 但这里的证明远较原来的证明简单, 其大意是 M. Crandall 告诉作者的. 1.3 中的双裂映射看 S. Lang [La 1], Ляпунов-Schmidt 手续看 L. Nirenberg [Nir 1].

§2 关于 Banach 流形的定义, 切映射以及向量场和流都请看 S. Lang [La 1], 关于 Finsler 流形的有关材料看 Palais [Pa 1]与[Pa 2].

§3 横截概念及横截定理取自 V. Guillemin, A. Pollack [GP 1]. 关于 Sard 定理的证明请看 Milnor [Mi 1], Fredholm 映射及 Sard Smale 定理请看 Smale [Sm1].

§4 除正文中提到的书及文献外, 还可参看 Temme [Te 1], P. Rabinowitz [Ra], Lloyd [Ll 1]以及 Cronin [Cr 1].

§5 有关 Соболев 空间的系统材料请看 Adams [Ad 1], 用奇异积分理论处理的有 E. M. Stein [St. 1] 也请看 Соболев 的书 [So 1] 以及 L. Hörmander [Hö 1]. 这里关于嵌入定理的证明 (引理 5.1) 是从 Gagliardo [Ga 1]中演化而来的.

§6 关于椭圆算子的边值问题的 L^p 估计看[ADN 1], 自伴性看[Ag 1] 或 Lions, Magenes [LM 1], Schauder 估计看 Gilbarg Trudinger [GT 1], Крейн Рутман 定理看 [Kre 1], 或关肇直[关 1]. 波算子的讨论是属于 Lavicarova[Lav 1]的, 也请看 Brezis, Nirenberg [BN 2] 与 Rabinowitz [Ra 1]. Hamilton 算子的讨论散见于 Rabinowitz [Ra 4, Ra 7].

第二章 极值理论与凸分析

经典的变分法几乎与找泛函的极值是同义语、因为除大范围变分学而外，寻求泛函的极值一直是变分法的主要内容.

在第一章§5，我们曾考察过下列泛函：

$$J(u)=\int_\Omega \mathbf{f}(x,\ u,\ \nabla u)dx,$$

其中 $\mathbf{f}$：$\Omega\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{nN}\to\mathbb{R}^1$，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，而 $u\in C^1(\overline{\Omega},\ \mathbb{R}^N)$，连同边界条件 $u|_{\partial\Omega}=\varphi$，其中 φ 是 $\partial\Omega$ 上的给定函数. 在对 $\mathbf{f}$ 适当添加连续性、可测性以及增涨性限制后，J 的 Euler 方程成为

$$\int_\Omega\Big[\sum_\alpha \mathbf{f}_{\,p^i_\alpha}(x,\ u,\ \nabla u)\partial_\alpha v^i+\mathbf{f}_{\,u^i}(x,\ u,\ \nabla u)v^i\Big]=0$$
$$\forall v=(v^1,\ \cdots,\ v^n)\in\mathscr{D}(\Omega)^n.$$

如果 $\mathbf{f}$ 本身还是 C^2 连续的，并且知道解 $u\in C^2$，连同 Ω 也足够光滑，那么便导出 u 满足的微分方程组

$$-\sum_{\alpha=1}^n\partial_\alpha\mathbf{f}_{\,p^i_\alpha}(x,\ u,\ \nabla u)+\mathbf{f}_{\,u_i}(x,\ u,\ \nabla u)=0,\ i=1,\ \cdots,\ N.$$

这是一个拟线性方程组. 它包含许多物理学上的和几何学上的有趣问题作为特殊情形. 特别是，若把 Ω 换成一个 Riemann 流形，u 表示这流形到另一个 Riemann 流形的映射的局部表示，则这个方程组便包含 Riemann 流形上的测地线方程、极小曲面方程、调和映射方程等为特例. 但这些具体问题的研究，内容非常丰富，为证其解的存在性与正则性，除了要用变分方法而外，还涉及到具体的几何性质和分析上的细致估计，非有专著不能尽其详. 本书目标

在于介绍临界点的一般理论，对其经典部分，只能介绍一些基本原则；而对其应用，也只得以一些典型的模型问题为例．好在对于上述几何与方程问题都已有不少专门著作可供参考，例如测地线方程看 Klingenberg[KCl]，极小曲面看 Gilbarg Trudinger[G. T. 1]，Osserman[OS 1]，调和映射看 Hildbrandt[Hi 1]等．

凸分析是六十年代兴起的一个分支，在变分理论中占一独特位置．一方面，它推广变分理论于未必可微的凸函数，另一方面，它的共轭函数理论又发展了古典的 Legendre 变换理论，从而扩大了极值理论可应用的范围．为此在本章我们以一节的篇幅介绍这部分内容，同时还将介绍凸分析理论的进一步推广：对局部 Lipschitz 函数推广的微分学——非光滑分析．这部分内容本来是从规划、控制等理论中发展起来的，近年来又找到了它在数学物理自由边值问题中的应用．

本章分五节，§1是极值的基本理论，§2是凸分析基础．§3～§5都是各种应用的例．在例子的选择上，我们力求照顾方法的典型性和问题的兴趣两个方面．在方法上，我们突出约束极值问题应用的技巧．也就是如何设置约束条件，以及如何消除 Lagrange 乘子 λ 的技巧，§3的例4介绍 Nehari 技巧，使 $\lambda=0$；§4，使 $\lambda=1$，而§5利用齐次性把 Lagrange 乘子 λ 自然地吸收掉．§4和§5分别是两个本身有兴趣的问题：(1) 给定一个函数 K，问是否有与原 Riemann 度量逐点保形的 Riemann 度量使之以 K 为其 Gauss 曲率？(2) 在给定的凸等量面上是否存在着这 Hamilton 系统的周期轨道？

§1　泛函的极值理论

本节介绍无穷维 Banach 空间上泛函的极值的基本理论：无约束极值，Finsler 流形上的极值，Lagrange 乘子理论等．第二段介绍 Ekeland 的近似极值点定理，它是近十年来的产物，虽然证明并不复杂，但读者将会看到它是非常基本的．

1.1 无约束极值点

设 $\mathbf{f}: \mathscr{X} \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$，但 $\mathbf{f} \not\equiv +\infty$，其中 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间．求 $\mathrm{Min}\{\mathbf{f} \mid x \in \mathscr{X}\}$．最自然的想法是以 $\dim \mathscr{X} < +\infty$ 的情形为出发点，因为那是在数学分析中早就熟悉了的．不难看出，若有条件：

(1) $\mathbf{f}$ 下半连续，即 $x_n \to x_0 \Rightarrow \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{f}(x_n) \geqslant \mathbf{f}(x_0)$，

(2) $\mathbf{f}$ 是强制的，即 $\lim_{\|x\|\to+\infty} \mathbf{f}(x) = +\infty$，

则 $\mathbf{f}$ 必定取到极小值点．

证明很简单．首先由条件(1)与(2)，

$$-\infty < C \triangleq \inf\{\mathbf{f}(x) \mid x \in \mathscr{X}\},$$

又因为 $\mathbf{f} \not\equiv +\infty$，所以 $C < +\infty$．抽极小化列 x_n 使得

$$\mathbf{f}(x_n) < C + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

由(2)，$\{x_n\}$ 有界，从而有收敛子列 $\{x_{ni}\} \to x^*$，再由(1)即得

$$C \leqslant \mathbf{f}(x^*) \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \mathbf{f}(x_{ni}) \leqslant C,$$

所以 x^* 是极小值点．

在这个证明中，$\dim \mathscr{X} < +\infty$ 起了关键作用，它保证有界点列有收敛子列．推广到∞维 Banach 空间，这当然是不成立的，然而依照下列

Eberlein-Шмулян 定理（参看关肇直、张恭庆、冯德兴[KCF1]） 设 $\mathscr{X}$ 是一个自反的 Banach 空间，则其中任意有界点列必有一个弱敛子列．

不难推广有穷维空间的结论如下：

定义 1.1 $\mathbf{f}: \mathscr{X} \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ 称为是弱下半连续的，是指：$x_n \rightharpoonup x_0$（弱）$\Rightarrow \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{f}(x_n) \geqslant \mathbf{f}(x_0)$．

$\mathscr{X}$ 中的一个子集 M 称为是弱闭的，是指：$x_n \in M$，$x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow x_0 \in M$．

用对有穷维情形的同样证明可得

定理 1.1 设 M 是自反 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 中的一个弱闭非空子集，又设 $\mathbf{f}: M \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$，$\mathbf{f} \not\equiv +\infty$ 是弱下半连续的强制函数；则 $\mathbf{f}$ 在 M 上达到极小值点.

显然，弱下半连续蕴含了下半连续；反过来，一般是不对的，然而对于凸泛函 $\mathbf{f}$，即

$$\mathbf{f}(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda \mathbf{f}(x)+(1-\lambda)\mathbf{f}(y),$$

$\forall x, y \in M$, $\forall \lambda \in [0, 1]$，当 M 是一个凸集．有下列

定理 1.2 设 $\mathbf{f}: M \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$，是弱闭凸集 M 上的凸函数，则 $\mathbf{f}$ 弱下半连续 $\Leftrightarrow$ 下半连续.

证明 只须证"$\Leftarrow$"．反证．设有 $\varepsilon_0>0$ 及 $\{x_n\} \subset M$，满足：$x_n \rightharpoonup x_0$，但 $\mathbf{f}(x_n)<\mathbf{f}(x_0)-\varepsilon_0$．然而由假设，$\mathbf{f}$ 是下半连续的，$\exists \delta_0>0$ 使得 $\forall x \in M$，$\|x-x_0\|<\delta_0 \Rightarrow \mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x_0) \geqslant -\varepsilon_0$．应用 Mazur 定理 ([Yo1, p. 120])，$\exists \{\alpha_n\}_1^m$，$\alpha_n \geqslant 0$，$n=1, \cdots, m$，$\sum\limits_{n=1}^m \alpha_n=1$，适合

$$\left\|\sum_{n=1}^m \alpha_n x_n-x_0\right\|<\delta_0,$$

从而有 $\quad \mathbf{f}(x_0)-\varepsilon_0 \leqslant \mathbf{f}\left(\sum\limits_{n=1}^m \alpha_n x_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^m \alpha_n \mathbf{f}(x_m)<\mathbf{f}(x_0)-\varepsilon_0,$

即导出矛盾.

联合定理 1.1 与 1.2 得到

推论 1.1 设 $\mathscr{X}$ 是一个自反的 Banach 空间，$\mathbf{f}: \mathscr{X} \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$，$\mathbf{f} \not\equiv +\infty$，下半连续、凸，并满足强制性条件，则 $\mathbf{f}$ 达到极小值点.

有穷维结论的另一条推广途径是把 $\mathbf{f}$ 直接限制在一个列紧集 K 上，同样导出

定理 1.3 设 K 是一个列紧的拓扑空间，$\mathbf{f}: K \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$，序列下半连续，即 $x_n \to x_0 \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} \mathbf{f}(x_n) \geqslant \mathbf{f}(x_0)$，且 $\mathbf{f} \not\equiv +\infty$；则 $\mathbf{f}$ 在 K 上达到极小值点.

1.2 近似极小值点

在这一段我们以 Ekeland 的近似极小值点定理为出发点引

由一种添加在函数 $\mathbf{f}$ 上的"紧性"条件，其作用是取代空间的某种紧性，以及函数自身的强制性．这个条件被称为 Palais-Smale 条件．由此导出的推论 1.3 是一个非常有用的极值存在性定理．它完全摆脱了凸性的作用，对于空间 $\mathscr{X}$ 或流形 M 也没作紧性要求．

当既没有紧性，又没有泛函凸性的情况下，一般不能使 $\mathbf{f}$ 达到极小值点，但却有下列的"近似极小值点"．

定理 1.4　设 (E, ρ) 是一个完备的度量空间，$\mathbf{f}: E\to\mathbb{R}^1\cup\{+\infty\}$，且 $\mathbf{f}$ 不恒等于 $+\infty$．又设 $\mathbf{f}$ 是有下界的，下半连续函数，又设有 $\varepsilon>0$ 以及 $x_\varepsilon\in E$ 使得

$$\mathbf{f}(x_\varepsilon)<\inf_{x\in E}\mathbf{f}(x)+\varepsilon,$$

则存在点 $y_\varepsilon\in E$，使得

$$\mathbf{f}(y_\varepsilon)\leqslant\mathbf{f}(x_\varepsilon), \tag{1.1}$$

$$\rho(y_\varepsilon, x_\varepsilon)\leqslant 1, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{f}(x)>\mathbf{f}(y_\varepsilon)-\varepsilon\rho(y_\varepsilon, x),\quad \forall x\neq y_\varepsilon. \tag{1.3}$$

证明　逐次定义 u_n, $n=0, 1, 2, \cdots$ 如下：$u_0=x_\varepsilon$．若 u_n 已知，则或者

(1) $\mathbf{f}(w)>\mathbf{f}(u_0)-\varepsilon\rho(u_n, w)$, $\forall w\in E\setminus\{u_n\}$，如此则取 $u_{n+1}=u_n$；或者

(2) $\exists w\in E\setminus\{u_n\}$ 使 $\mathbf{f}(w)\leqslant\mathbf{f}(u_n)-\varepsilon\rho(u_n, w)$．如此则令 $S_n=\{w\in E\mid \mathbf{f}(w)\leqslant\mathbf{f}(u_n)-\varepsilon\rho(u_n, w)\}$，取 $u_{n+1}\in S_n$ 使得

$$\mathbf{f}(u_{n+1})-\inf_{x\in S_n}\mathbf{f}(x)\leqslant\frac{1}{2}[\mathbf{f}(u_n)-\inf_{x\in S_n}\mathbf{f}(x)] \tag{1.4}$$

我们来证，$\{u_n\}$ 是一个 Cauchy 列．事实上，若情况(1)一直发生，那么点列 u_n 必是稳定的．所以不妨设(1)不发生．便有

$$\varepsilon\rho(u_n, u_{n+1})\leqslant\mathbf{f}(u_n)-\mathbf{f}(u_{n+1}),\ n=1, 2, \cdots \tag{1.5}$$

从而

$$\varepsilon\rho(u_n, u_m)\leqslant\mathbf{f}(u_n)-\mathbf{f}(u_m),\ \forall n, m, n\leqslant m \tag{1.6}$$

又因为 $\mathbf{f}(u_{n+1})\leqslant\mathbf{f}(u_n)$ 以及 $\mathbf{f}(u_n)\geqslant\inf_{x\in E}\mathbf{f}(x)$，所以 u_n 是 Cauchy 列．设 $u_n\to u^*$，由 $\mathbf{f}$ 的下半连续性，得

$$\mathbf{f}(u^*)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\mathbf{f}(u_n),$$

现在来证：可以取 $y_\varepsilon=u^*$.

事实上，(1.1)是显然的. $\mathbf{f}(u^*)\leqslant\mathbf{f}(u_0)=\mathbf{f}(x_\varepsilon)$

至于(1.2)是由于，

$$\begin{aligned}\varepsilon\rho(x_\varepsilon,\ y_\varepsilon)&=\varepsilon\lim_{n\to\infty}\rho(x_\varepsilon,\ u_n)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}(\mathbf{f}(x_\varepsilon)-\mathbf{f}(u_n))\\&\leqslant\mathbf{f}(x_\varepsilon)-\inf_{x\in E}\mathbf{f}(x)\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

最后证(1.3)，反证，倘若不对，$\exists w\neq y_\varepsilon$，使得

$$\mathbf{f}(w)\leqslant\mathbf{f}(y_\varepsilon)-\varepsilon\rho(y_\varepsilon,\ w).$$

在(1.6)中令 $m\to+\infty$ 便有

$$\varepsilon\rho(y_\varepsilon,\ u_n)\leqslant\mathbf{f}(u_n)-\mathbf{f}(y_\varepsilon).$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(w)&\leqslant\mathbf{f}(u_n)-\varepsilon\rho(y_\varepsilon,\ w)-\varepsilon\rho(y_\varepsilon,\ u_n)\\&\leqslant\mathbf{f}(u_n)-\varepsilon\rho(w,\ u_n),\end{aligned}\tag{1.7}$$

即 $w\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$. 但由(1.4)，

$$2\mathbf{f}(u_{n+1})-\mathbf{f}(u_n)\leqslant\inf_{x\in S_n}\mathbf{f}(x)\leqslant\mathbf{f}(w),$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\mathbf{f}(y_\varepsilon)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\mathbf{f}(u_n)\leqslant\mathbf{f}(w),$$

这便与(1.7)矛盾.

推论 1.2 设 $(E,\ \rho)$ 是一个完备度量空间，$\mathbf{f}: E\to\mathbb{R}^1\cup\{+\infty\}$，下半连续，有下界并 $\not\equiv+\infty$. 则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in E$ 满足：

$$\mathbf{f}(x_\varepsilon)<\inf_{x\in E}\mathbf{f}(x)+\varepsilon,$$

$$\mathbf{f}(x)\geqslant\mathbf{f}(x_\varepsilon)-\varepsilon\rho(x_\varepsilon,\ x),\quad\forall x\in E.$$

设 M 是一个 Finsler 流形(参看第一章§2)，$\mathbf{f}: M\xrightarrow{C^1}\mathbb{R}^1$. 为了在 M 上考察 $\mathbf{f}$ 的极小值. 我们把“紧性”条件添加到函数 $\mathbf{f}$ 自身上去.

定义 1.2 (Palais-Smale) 设 $\mathbf{f}\in C^1(M,\mathbb{R}^1)$. 称 $\mathbf{f}$ 满足 Palais-Smale 条件(简作 P. S.), 是指: $\forall\{p_n\}\subset M$,

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{f}(p_n)\ \text{有界}\\ d\mathbf{f}(p_n)\to\theta\end{array}\right\}\Rightarrow\{p_n\}\ \text{有收敛子列}. \tag{1.8}$$

因为在第一章§2定理2.4中, 我们曾指出一个完备的 Finsler 流形 M 是可以度量化的, 它可以看成是一个完备的度量空间. 于是还有

推论 1.3 设 M 是一个完备的 Finsler 流形, $\mathbf{f}\in C^1(M,\mathbb{R}^1)$ 满足 Palais-Smale 条件, 并且是下半有界的, 则 $\mathbf{f}$ 达到极小值点, 即 $\exists p_0\in M$, 使得

$$\mathbf{f}(p_0)=\inf_{p\in M}\mathbf{f}(p),\ \text{并且}\ d\mathbf{f}(p_0)=\theta.$$

证明 利用推论 1.2, $\exists p_n\in M$, 使得 $\mathbf{f}(p_n)\to\inf\limits_{x\in M}\mathbf{f}(x)$, 并且 $\mathbf{f}(x)\geqslant\mathbf{f}(p_n)-\varepsilon\rho(p_n,x)$, $\forall x\in M$. 后者蕴含了 $d\mathbf{f}(p_n)\to\theta$. 由 Palais-Smale 条件, 存在 $p_{n_i}\to p_0\in M$. 由 $\mathbf{f}$ 与 $d\mathbf{f}$ 的连续性,

$$\mathbf{f}(p_0)=\inf_{p\in M}\mathbf{f}(p),\ d\mathbf{f}(p_0)=\theta.$$

注 1.1 Palais-Smale 条件, 由于是把"紧性"条件和流形 M 以及函数 $\mathbf{f}$ 本身结合起来考虑的. 所以有较大的优越性. 这个条件在后面要经常遇到.

1.3 约束极值问题

所谓约束极值问题, 其实就是在给定的 Finsler 流形 M 上求一个泛函 $\mathbf{f}: M\to\mathbb{R}^1$ 的极值问题. 不过这个流形 M 是通过一组泛函 $g_1,\cdots,g_n$ 给定的.

设 $\mathbf{f}, g_1,\cdots,g_n: \mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$, 是 C^1 连续的, $\mathscr{X}$ 是一个给定的实 Banach 空间. 令

$$M\doteq\{x\in\mathscr{X}\mid g_i(x)=0,\ i=1,\cdots,n\}.$$

按第一章§3, 当 $\{g_i'(x)\}_1^n$ 在 $x\in M$ 上每点线性无关时, $G: x\mapsto(g_1(x),\cdots,g_n(x))$ 作为 $\mathscr{X}\mapsto\mathbb{R}^n$ 的映射横截于 $\{\theta\}$. 从而 $M=G^{-1}(\theta)$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个子流形, 并具有自然的 Finsler 构造. 我们将

通过 $\mathbf{f}'$, g_1', $\cdots$, g_n' 来描写 $\mathbf{f}|M$ 的临界点.

定理 1.5 为了 $p\in M$ 是 $\mathbf{f}|_M$ 的一个临界点, 必须且仅须存在实数 λ_1, $\cdots$, λ_n, 使得

$$\mathbf{f}'(p)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i'(p)=\theta.$$

证明 "$\Leftarrow$". 因为 $\{g_i'(p)\}_1^n$ 线性无关, 存在局部浸盖(第一章 § 2, 定理 2.1), 在这坐标系下, M 在 p 点附近局部同胚于 $\{g_1'(p), \cdots, g_n'(p)\}^\perp$, 即有直和分解: $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\oplus \mathrm{span}\,\{e_1, \cdots, e_n\}$, 使得 M 的 p 邻域 U 微分同胚于 $\mathscr{X}_1$ 中的一个 θ 邻域 V; $e_i\in\mathscr{X}$ 满足: $\langle g_j'(p), e_i\rangle=\delta_{ij}$, 以及 $\langle g_j'(p), x_1\rangle=0$, $\forall x_1\in\mathscr{X}_1$, $i, j=1, \cdots, n$. 从而 $\langle\mathbf{f}'(p), x_1\rangle=0$, $\forall x_1\in\mathscr{X}_1$. 所以 p 是 $\mathbf{f}|_M$ 的临界点, $d\mathbf{f}|_M(p)=\theta$.

"$\Rightarrow$". 过点 p 的任意 C^1 曲线 h: $(-1,1)\to M$, $h(0)=\theta$, 如果在 M 上. 把 h 按 e_1, $\cdots$, e_n 及 $\mathscr{X}_1$ 分解:

$$h(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\varepsilon)e_i+x_1(\varepsilon)+p, \quad x_1(\varepsilon)\in\mathscr{X}_1$$

由于 $h(0)=\theta$, 以及 $g_j(h(\varepsilon))=0$, $j=1, \cdots, n$; 所以有

$$\lambda_i(0)=0,\ i=1,\ \cdots,\ n;$$

$$x_1(0)=0,$$

以及 $$0=\frac{d}{d\varepsilon}g_j(h(\varepsilon))\big|_{\varepsilon=0}=\langle g_j'(p),\ \Sigma\lambda_i'(\theta)e_i+x_1'(0)\rangle$$

$$=\lambda_j'(0),\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

所以 $\lambda_1'(0)=\cdots=\lambda_n'(0)=0$. 如今 p 是 $\mathbf{f}|_M$ 的临界点, 所以

$$0=\frac{d}{d\varepsilon}\mathbf{f}(h(\varepsilon))\big|_{\varepsilon=0}=\left\langle\mathbf{f}'(p),\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i'(0)e_i+x_1'(0)\right\rangle$$

$$=\langle\mathbf{f}'(p),\ x_1'(0)\rangle.$$

由于 $x_1'(0)$ 可以取成 $\mathscr{X}_1$ 上的任意向量, 所以 $\mathbf{f}'(p)$ 在 $\{g_1'(p), \cdots, g_n'(p)\}$ 的致零空间 $\mathscr{X}_1$ 上为零. 由 Hahn-Banach 定理, 存在实数 λ_1, $\cdots$, λ_n 使得

$$\mathbf{f}'(p)=-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i'(p).$$

特别地有下列推论:

推论 1.4(Люстерник). 设 $\mathbf{f}, g: \mathscr{X} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^1$, 又设 $M_c = \{x \in \mathscr{X} \mid g(x) = c\} \neq \emptyset$, 若 $g'(x) \neq \theta$, $\forall x \in M_c$, 又若 p 是 $\mathbf{f}|_{M_c}$ 的极值点，则必有实数 λ 使得

$$\mathbf{f}'(p) + \lambda g'(p) = \theta.$$

这是因为极值点必是临界点.

注 1.2　定理 1.5 中的实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 称为 Lagrange 乘子.

作为推论 1.4 的一个具体应用, 有

定理 1.6　设 $\mathscr{X}$ 是一个实、自反 Banach 空间, $\mathbf{f}, g: \mathscr{X} \to \mathbb{R}^1$ 都是 C^1 函数; 并且 $\mathbf{f}$ 是弱下半连续的, g 是全连续的, 即

$$x_n \rightharpoonup x \Rightarrow g(x_n) \to g(x); \text{ 又设}$$

$$g'(x) = \theta \Rightarrow x = \theta, \text{ 以及 } g(\theta) = 0, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{f}(x) \to +\infty \quad \text{当} \quad \|x\| \to +\infty. \tag{1.10}$$

则 $\exists c \neq 0$, 使集合 $M_c = \{x \in \mathscr{X} \mid g(x) = c\} \neq \emptyset$, 并且对一切这样的实数 c, $\exists u_c \in M_c$ 及实数 λ_c 满足

$$\mathbf{f}'(u_c) = \lambda_c g'(u_c).$$

证明　按假设 (1.9), $g(x) \not\equiv 0$. 于是必有 $c \neq 0$, 使 $M_c \neq \emptyset$. 又因为 g 是全连续的, 所以 M_c 是弱闭子集, 由(1.9), $\theta \notin M_c$, $g'(x) \neq \theta$, $\forall x \in M_c$.

应用定理 1.1, $\mathbf{f}|_{M_c}$ 必达到极小值点 u_c, 再应用定理 1.5, 特别是推论 1.4, 得实数 λ_c 使得

$$\mathbf{f}'(u_c) = \lambda_c g'(u_c).$$

§ 2　凸分析与非光滑分析

凸性在极值理论中所起的作用在上一节已经明显地表现出来了. 本节分三段介绍, 第一段介绍次微分, 它在凸函数类中推广导数概念, 使得凸函数的极值也有“Euler 方程”. 有了次微分, 凸函数就有了微分学. 第二段介绍凸函数的共轭函数, 基本结果是推论 2.2, 它揭示凸函数的次微分与其共轭函数的次微分互逆. 正是这

个关系，使得共轭函数成为转化极值问题的工具. 第三段，非光滑分析把微分学推广到局部 Lip. 函数类，并对这类函数建立约束极值的条件.

2.1 凸函数的次微分

设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间，记 $\bar{R}^1=R^1\cup\{+\infty\}$.

又设 $\varphi:\mathscr{X}\to\bar{R}^1$ 是一个凸函数. 一般来说，它未必是可微的. 但可以推广"导数"概念如下:

$x^*\in\mathscr{X}^*$ 称为是 φ 在 $x_0\in\mathscr{X}$ 点的*次梯度*，是指:

$$\varphi(x_0)+\langle x^*, x-x_0\rangle\leqslant\varphi(x),\ \forall x\in\mathscr{X}.$$

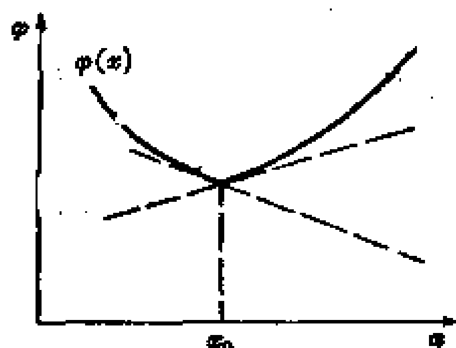


图 2.1

x_0 点的 φ 的一切次梯度的集合称为 φ 在 x_0 点的*次微分*，记作 $\partial\varphi(x_0)$.

右图表现次梯度与次微分的几何意义:

对于 $\mathbb{R}^1$ 上的凸函数，在 x_0 处的次梯度是那些过 x_0 点的切线的斜率: 这些切线在这图形 $(x, \varphi(x))$ 的下方. 在右图中，$\varphi(x)$ 在 x_0 点的次微分 $\partial\varphi(x_0)$ 是一个集合，它对应着夹在两根虚线之间的一切直线的斜率.

次微分在研究凸函数时往往起到导数在可微函数中的作用. 我们先来考察它与导数的关系.

1. 设 $\varphi:\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$ 凸，并且在点 x_0 处 Gateaux 可微，其 G 导数满足: $d\varphi(x_0, h)=-d\varphi(x_0, -h)$, $\forall h\in\mathscr{X}$; 则必有 $\mathscr{X}$ 上的一个线性泛函 L, 使得 $L(h)=d\varphi(x_0, h)$, $\forall h\in\mathscr{X}$.

证明 不妨设 $x_0=\theta$, $\varphi(x_0)=0$, $\forall h\in\mathscr{X}$, 令 $g(t)=\varphi(th)$, $\forall t\in\mathbb{R}^1$. 则左导数 $g'_-(0)=-d\varphi(\theta, -h)$, 右导数 $g'_+(0)=d\varphi(\theta, h)$. 由假设 $g'(0)$ 存在. 定义泛函 L 如下:

$$L(h)=g'(0).$$

由 G 导数的正齐性，$L(h)$ 是齐次的，即 $L(\lambda h)=\lambda L(h)$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}^1$. 我们再证它是*次可加的*: 由

$$\varphi\left(t\frac{h_1+h_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(\varphi(th_1)+\varphi(th_2)),\quad \forall h_1,\ h_2\in\mathscr{X}$$

推得 $$\mathrm{d}\varphi\left(\theta,\ \frac{h_1+h_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(\mathrm{d}\varphi(\theta,\ h_1)+\mathrm{d}\varphi(\theta,\ h_2)),$$

或者 $\mathrm{d}\varphi(\theta,\ h_1+h_2)\leqslant\frac{1}{2}[\mathrm{d}\varphi(\theta,\ h_1)+\mathrm{d}\varphi(\theta,\ h_2)]$，即得

$$L(h_1+h_2)\leqslant L(h_1)+L(h_2),\ \forall h_1,\ h_2\in\mathscr{X}.$$

于是 L 是一个线性泛函.

2. 设 $\varphi:\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$，凸，在 x_0 处连续；则为了 φ 在 x_0 处 G 可微，$\mathrm{d}\varphi(x_0,\ h)=-\mathrm{d}\varphi(x_0,\ -h)$，并且 $\mathrm{d}\varphi(x_0,\ h)$ 关于 h 连续，必须且仅须 $\partial\varphi(x_0)$ 由一点组成：$\partial\varphi(x_0)=\{x^*\}$，$\langle x^*,\ h\rangle=\mathrm{d}\varphi(x_0,\ h)$.

证明 "$\Rightarrow$". 由(1)，$\exists x^*\in\mathscr{X}^*$ 使得 $\langle x^*,\ h\rangle=\mathrm{d}\varphi(x_0,\ h)$，由凸性，

$$\mathrm{d}\varphi(x_0,\ h)=\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(x_0+th)-\varphi(x_0)}{t}\leqslant\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$$

推出 $x^*\in\partial\varphi(x_0)$.

反之，若 $x_1^*\in\partial\varphi(x_0)$，则

$$\langle x_1^*,\ h\rangle\leqslant\frac{1}{t}[\varphi(x_0+th)-\varphi(x_0)],\quad \forall h\in\mathscr{X},\ \forall t>0,$$

从而 $$\langle x_1^*,\ h\rangle\leqslant\mathrm{d}\varphi(x_0,\ h)=\langle x^*,\ h\rangle,\quad \forall h\in\mathscr{X},$$

推出 $x_1^*=x_0^*$ 即得 $\partial\varphi(x_0)=\{x^*\}$.

"$\Leftarrow$". 只要证明 $\mathrm{d}\varphi(x_0,\ h)=-\mathrm{d}\varphi(x_0,\ -h)$ 就够了. 因为 φ 凸，Gateaux 导数 $\mathrm{d}\varphi(x_0,\ h)$ 总是存在的，再由 1 即得结论. 为此不妨设 $x_0=\theta$，$\varphi(x_0)=0$.

倘若有 $h_0\in\mathscr{X}$ 使 $\mathrm{d}\varphi(\theta,\ h_0)\neq-\mathrm{d}\varphi(\theta,\ -h_0)$. 同样令 $g(t)=\varphi(th_0)$，则 $g'_+(0)\neq g'_-(0)$. 不妨设 $g'_-(0)<g'_+(0)$. 取 $\alpha\in[g'_-(0),\ g'_+(0)]$. 定义 $\mathbb{R}^1h_0$ 上的线性泛函如下：

$$L(sh_0)=\alpha s,\quad \forall s\in\mathbb{R}^1,$$

则 $$L(sh_0)\leqslant\varphi(sh_0),\quad \forall s\in\mathbb{R}^1.$$

因为 φ 凸，且在 x_0 连续，所以 L 可以连续扩张为 $x_\alpha^*\in\mathscr{X}^*$，适合

$$\langle x_\alpha^*,\ h\rangle\leqslant\varphi(h),\quad \forall h\in\mathscr{X}.$$

从而 $\{x_\alpha^* | \alpha \in [g'_-(0), g'_+(0)]\} \subset \partial\varphi(\theta)$. 与 $\partial\varphi(\theta)$ 是单点集的假设矛盾.

关于次微分,有下列性质:

1° $\partial\varphi(x_0)$ 是 * 弱闭凸集, $\forall x_0 \in \mathscr{X}$.

先证凸. 设 $x_i^* \in \partial\varphi(x_0)$, $i=1, 2$, 即

$$\varphi(x_0) + \langle x_i^*, x - x_0 \rangle \leqslant \varphi(x), \ \forall x \in \mathscr{X}, \ i=1, 2.$$

于是 $\forall \lambda \in [0, 1]$, 总有

$$\varphi(x_0) + \langle \lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^*, x - x_0 \rangle \leqslant \varphi(x),$$

即 $\lambda x_1^* + (1-\lambda) x_2^* \in \partial\varphi(x_0)$.

再证 * 弱闭. 设 $x_\alpha^* \in \partial\varphi(x_0)$, $\alpha \in \varLambda$ 是一个定向列. 并有 $x_\alpha^* \to x^*$ (* 弱). 则由

$$\varphi(x_0) + \langle x_\alpha^*, x - x_0 \rangle \leqslant \varphi(x), \quad \forall x \in \mathscr{X}, \ \forall \alpha \in \varLambda$$

推出
$$\varphi(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle \leqslant \varphi(x), \quad \forall x \in \mathscr{X},$$

即 $x^* \in \partial\varphi(x_0)$.

问: $\partial\varphi(x_0)$ 是否可能为空集? 答: 是!

例 1 $\mathscr{X} = \mathbb{R}^1$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ +\infty, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

则当 $|x_0| \geqslant 1$ 时, $\partial\varphi(x_0) = \emptyset$.

为了使次微分的讨论有意义(即 $\partial\varphi(x_0) \neq \emptyset$), 我们对函数 φ 需添加一定的限制:

2° 若 $\varphi: \mathscr{X} \to \mathbb{R}^1$, 凸、连续; 则 $\partial\varphi(x_0) \neq \emptyset$, $\forall x_0 \in \mathscr{X}$, 且 $\partial\varphi(x_0)$ 是 * 弱紧的.

证明 考察图集 $\mathrm{epi}(\varphi) \triangleq \{(x, t) \in \mathscr{X} \times \mathbb{R}^1 | \varphi(x) \leqslant t\}$, 则由关于 φ 的假设, $\mathrm{epi}(\varphi)$ 是具有非空内点的凸集. 由 Hahn-Banach 定理, 有非零的 $(x^*, \xi) \in \mathscr{X}^* \times \mathbb{R}^1$ 及 $\alpha \in \mathbb{R}^1$, 使

$$\langle x^*, x_0 \rangle - \xi\varphi(x_0) \geqslant \alpha \geqslant \langle x^*, x \rangle - \xi t, \ \forall (x, t) \in \mathrm{epi}(\varphi).$$

由于 $(x_0, \varphi(x_0)+1) \in \mathrm{epi}(\varphi)$, 所以 $\xi \geqslant 0$.

但 $\xi \neq 0$, 因若 $\xi = 0$, 则 $\langle x^*, x_0 - x \rangle \geqslant 0, \forall x \in \mathscr{X}$. 从而 $x^* = \theta_0$, 这与 (x^*, ξ) 非零矛盾, 所以 $\xi > 0$.

令 $x_0^*=\frac{1}{\xi}x^*$，则

$$\langle x_0^*, x_0\rangle-\varphi(x_0)\geqslant\langle x_0^*, x\rangle-\varphi(x), \forall x\in\mathscr{X}.$$

这表明 $x_0^*\in\partial\varphi(x_0)$。

再证 $\partial\varphi(x_0)$ *弱紧。令 $U=\{h\in\mathscr{X}\,|\,\varphi(x_0+h)\leqslant\varphi(x_0)+1\}$，则 U 是 $\mathscr{X}$ 中的 θ 点的一个邻域。设球 $B(\theta, r)\subset U$，$r>0$，则

$$\langle x^*, h\rangle\leqslant\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\leqslant1,$$
$$\forall h\in B(\theta, r),\ \forall x^*\in\partial\varphi(x_0).$$

这表明：$\partial\varphi(x_0)\subset B(\theta, r)^\circ\triangleq\{x^*\in\mathscr{X}^*\,|\,|\langle x^*, h\rangle|\leqslant1, \forall h\in B(\theta, r)\}$，后者是*弱紧的。再由 1°，$\partial\varphi(x_0)$ 是*弱闭的。所以 $\partial\varphi(x_0)$ *弱紧。

3° 为了 x_0 是 φ 的极小点 $\Leftrightarrow\theta\in\partial\varphi(x_0)$。

4° 在 $\mathbb{R}^n$ 上，如果 φ 是凸的，并且 $\partial\varphi(x_0)$ 由单点 $\{x^*\}$ 组成，则 φ 在 x_0 是 Frechet 可微的，$\varphi'(x_0)=x^*$。

证明 因为有穷维空间 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数 φ 总是连续的，由(2)，φ G-可微，并且 $d\varphi(x_0, h)=\langle x^*, h\rangle$。要证：

$$|\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)-\langle x^*, h\rangle|=o(\|h\|),\ 当\ h\to\theta.$$

不妨设 $x_0=\theta$，$h=\sum_{i=1}^n h_ie_i$，其中 $\{e_i\}_1^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的基。令

$$\psi(h)=\varphi(h)-\varphi(\theta)-\langle x^*, h\rangle,$$

则
$$\psi(h)=\psi\left(\sum_{i=1}^n h_ie_i\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\psi(nh_ie_i)$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^n h_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n\left[\frac{1}{nh_i}\psi(nh_ie_i)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}=o(\|h\|).$$

同理 $\psi(-h)=o(\|h\|)$，但因

$$0=\psi(\theta)\leqslant\frac{1}{2}(\psi(h)+\psi(-h)),$$

所以 $\psi(h)\geqslant-\psi(-h)$。即得

$$|\psi(h)|=o(\|h\|),\quad 当\ h\to\theta.$$

5° $\partial(\lambda\varphi)(x_0)=\lambda\partial\varphi(x_0)$（由定义）

6° 设 φ，ψ 凸连续，则有 $\partial(\varphi+\psi)(x_0)=\partial\varphi(x_0)+\partial\psi(x_0)$。

证明 由定义，$\partial\varphi(x_0)+\partial\psi(x_0)\subset\partial(\varphi+\psi)(x_0)$.

反之，不妨设 $x_0=\theta$, $\varphi(\theta)=\psi(\theta)=0$, 若 $\theta\in\partial(\varphi+\psi)(\theta)$. 将证 $\exists x_0^*\in\partial\varphi(\theta)$, 使 $-x_0^*\in\partial\psi(\theta)$. 由设 $0\leqslant(\varphi+\psi)(x)$, $\forall x\in\mathscr{X}$, 令 $K=\{(x,t)\in\mathscr{X}\times\mathbb{R}^1\mid t\leqslant-\psi(x)\}$, 则 K 凸，且

$$K\cap\operatorname{int}(\operatorname{epi}(\varphi))=\emptyset.$$

由 Edelheit 分离定理，$\exists$ 非零的 $(x^*,\lambda)\in\mathscr{X}^*\times\mathbb{R}^1$, 满足：

$$\langle x^*,x\rangle+\lambda\varphi(x)\geqslant0\geqslant\langle x^*,x\rangle+\lambda t,\quad\forall(x,t)\in K.$$

和性质 2° 证明类似，$\lambda>0$. 令 $x_0^*=-x^*/\lambda$, 则 x_0^* 即满足要求. 如此即得 $\partial(\varphi+\psi)(\theta)\subset\partial\varphi(\theta)+\partial\psi(\theta)$.

7° 为了 $x^*\in\partial\varphi(x_0)$, 必须且仅须 $\varphi(x_0)+\langle x^*,x-x_0\rangle=0$ 是 $\operatorname{epi}(\varphi)$ 在 $(x_0,\varphi(x_0))$ 处的支撑超平面.

举几个例子.

例 2 $\partial\|x_0\|=\{x^*\in\mathscr{X}^*\mid\|x^*\|=1,\ \langle x^*,x_0\rangle=\|x_0\|\}$, 当 $x_0\neq\theta$.

证明 由 $\langle x^*,x-x_0\rangle=\langle x^*,x\rangle-\|x_0\|\leqslant\|x\|-\|x_0\|$ 推得包含关系"$\supset$". 反之，若 $x^*\in\partial\|x_0\|$, 则由

$$\langle x^*,-x_0\rangle\leqslant0-\|x_0\|=-\|x_0\|\ 以及$$

$$\langle x^*,x_0\rangle\leqslant2\|x_0\|-\|x_0\|=\|x_0\|$$

推得 $\langle x^*,x_0\rangle=\|x_0\|$. 再由

$$\langle x^*,x\rangle\leqslant\frac{1}{\lambda}[\|x_0+\lambda x\|-\|x_0\|],\quad\forall\lambda>0,$$

令 $\lambda\to+\infty$, 得 $\langle x^*,x\rangle\leqslant\|x\|$. 从而 $\|x^*\|\leqslant1$. 再联合 $\langle x^*,x_0\rangle=\|x_0\|$, 得 $\|x^*\|=1$.

例 3 设 $\beta:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 是一个单调不减函数，

$$\varphi(t)=\int_0^t\beta(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

则 φ 是一个连续凸函数，并且 $\partial\varphi(t_0)=[\beta(t_0-0),\beta(t_0+0)]$, $\forall t_0\in\mathbb{R}^1$.

联系到变分问题，考察

例 4 设 β 如上，$p>1$, 并满足：$|\beta(t)|\leqslant C_1+C_2|t|^p$. φ 定义如例 3. $\mathscr{X}=L^p(\Omega)$, 其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个具有穷测度 $\operatorname{mes}(\Omega)$

的可测集．令

$$J(u)=\int_{\Omega}\varphi(u(x))\mathrm{d}x,\ u\in L^p(\Omega)$$

则 $J:\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$ 凸，并且

$$\begin{aligned}\partial J(u_0)&=[\beta(u_0(x)-0),\ \beta(u_0(x)+0)]\\&\triangleq\{w(x)\in L^{p'}(\Omega)\mid\beta(u_0(x)-0)\leqslant w(x)\\&\leqslant\beta(u_0(x)+0)\}.\end{aligned}$$

证明　$w\in\partial J(u_0)\Leftrightarrow\int_{\Omega}w(x)(u(x)-u_0(x))\mathrm{d}x$

$$\leqslant\int_{\Omega}[\varphi(u(x))-\varphi(u_0(x))]\mathrm{d}x;\ \forall u\in L^p(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow w(x)(u(x)-u_0(x))$$

$$\leqslant\varphi(u(x))-\varphi(u_0(x))$$

$$\text{对 a. e. } x\in\Omega,\ \forall u\in L^p(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow w(x)\in\partial\varphi(u_0(x)),\ \text{对 a. e. } x\in\Omega.$$

再联合例 3 即得结论．

然而，如果 $p\leqslant\frac{2n}{n-2}$，则 $H^1(\Omega)\to L^p(\Omega)$．例 4 中的泛函 J 还是 $H^1(\Omega)$ 上的凸泛函．问 $\partial J(u_0)=?$

定理 2.1　设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 是两个 Banach 空间，满足：$\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$，$\mathscr{X}$ 在 $\mathscr{Y}$ 中稠密，而且嵌入映射 $i:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是连续的．又设 $\varphi:\mathscr{Y}\to\mathbb{R}^1$ 凸．满足局部 Lip．条件，即 $\forall y_0\in\mathscr{Y}$，$\exists y_0$ 的一个邻域 V 及正数 K 使得

$$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|\leqslant K\|y-y_0\|_{\mathscr{Y}},\quad\forall y\in V.$$

若记 $\hat{\varphi}=\varphi|_{\mathscr{X}}$，则有

$$\partial\varphi(x_0)=\partial\hat{\varphi}(x_0),\quad\forall x_0\in\mathscr{X}.$$

证明　由定义显见：$\partial\varphi(x_0)\subset\partial\hat{\varphi}(x_0)$．反之，由设 $x^*\in\partial\hat{\varphi}(x_0)$，$x_0\in\mathscr{X}$，按定义

$$\langle x^*,x-x_0\rangle\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)\quad\forall x\in\mathscr{X}.\tag{2.1}$$

由设 φ 在 $\mathscr{Y}$ 上满足局部 Lip 条件，有 x_0 的一个邻域 V，使得有 $K>0$ 满足

$$\langle x^*, x-x_0\rangle\leqslant K\|x-x_0\|_{\mathscr{Y}}, \quad \forall x\in\mathscr{X}\cap V.$$

这表明 x^* 可以唯一地延拓为 $\mathscr{Y}$ 上的连续线性泛函. 因为 $\mathscr{X}$ 在 $\mathscr{Y}$ 中稠,所以由(2.1)取极限,有

$$\langle x^*, y-x_0\rangle\leqslant\varphi(y)-\varphi(x_0), \quad \forall y\in\mathscr{Y},$$

这就导出 $x^*\in\partial\varphi(x_0)$.

推论 2.1 当 $|\beta(t)|\leqslant C_1+C_2|t|^{\frac{n+2}{n-2}}$ 时,又设 $\beta(t)$ 是单调不减函数;则在 $H^1(\Omega)$ 上, 例 4 中定义的泛函 J 是凸的, 满足局部 Lip. 条件,并有

$$\partial J(u_0)=[\beta(u_0(x)-0), \beta(u_0(x)+0)], \forall u_0\in H^1(\Omega).$$

2.2 共轭函数

设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间, $\mathscr{X}^*$ 为其共轭空间. 设 $\varphi: \mathscr{X}\to\mathbb{R}^1\cup\{+\infty\}$ 是不恒为 $+\infty$ 的,下半连续的凸函数. 称

$$\varphi^*(x^*)=\sup_{x\in\mathscr{X}}\{\langle x^*, x\rangle-\varphi(x)\} \tag{2.1}$$

为 φ 的共轭函数,其中 $\langle,\rangle$ 是 $\mathscr{X}^*$ 与 $\mathscr{X}$ 的对偶.

按定义可见

1° φ^* 是一个下半连续的凸函数(φ^* 可以取值 $+\infty$, 但不 $\neq-\infty$).

2° 若 $\varphi\leqslant\psi$, 则 $\varphi^*\geqslant\psi^*$.

3° (Young 不等式)

$$\varphi(x)+\varphi^*(x^*)\geqslant\langle x^*, x\rangle.$$

4° $\varphi(x)+\varphi^*(x^*)=\langle x^*, x\rangle\Leftrightarrow x^*\in\partial\varphi(x)$.

证明 事实上 $x^*\in\partial\varphi(x)\Leftrightarrow$

$$\langle x^*, y-x\rangle\leqslant\varphi(y)-\varphi(x), \quad \forall y\in\mathscr{X},$$

$$\Leftrightarrow \langle x^*, y\rangle-\varphi(y)\leqslant\langle x^*, x\rangle-\varphi(x), \quad \forall y\in\mathscr{X},$$

$$\Leftrightarrow \qquad \varphi^*(x^*)\leqslant\langle x^*, x\rangle-\varphi(x),$$

$$\Leftrightarrow \varphi^*(x^*)=\langle x^*, x\rangle-\varphi(x) \text{(由 Young 不等式)}$$

5° $\varphi^*\not\equiv+\infty$.

证明 取 $x_0\in\mathscr{X}$ 使 $\varphi(x_0)<+\infty$, 并取 $t_0<\varphi(x_0)$. 在空间 $\mathscr{X}\times\mathbb{R}^1$ 上考察下列两个凸集:

$$A=\mathrm{epi}\,\varphi\triangleq\{(x,t)\in\mathscr{X}\times\mathbb{R}^1\mid\varphi(x)<+\infty,\ t\geqslant\varphi(x)\},$$

$$B=\{(x_0,t_0)\}.$$

应用 Hahn-Banach 定理，$\exists(\mathbf{f},k)\in\mathscr{X}^*\times\mathbb{R}^1$ 以及 $\alpha\in\mathbb{R}^1$ 使得：

$$\langle\mathbf{f},x\rangle+kt>\alpha,\ \forall(x,t)\in\mathrm{epi}\,\varphi,$$

$$\langle\mathbf{f},x_0\rangle+kt_0<\alpha.$$

因此有 $$\langle\mathbf{f},x_0\rangle+k\varphi(x_0)>\alpha>\langle\mathbf{f},x_0\rangle+kt_0,$$

即得 $k>0$，以及

$$\left\langle-\frac{1}{k}\mathbf{f},x\right\rangle-\varphi(x)<-\frac{\alpha}{k},\ \forall x,\ \varphi(x)<+\infty$$

即得 $$\varphi^*\left(-\frac{1}{k}\mathbf{f}\right)<+\infty.$$

例 5　设 $\varphi(x)=\frac{1}{p}\|x\|^p$，$p>1$，则 $\varphi^*(x^*)=\frac{1}{p'}\|x^*\|^{p'}$，其中

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

证明　$$\varphi^*(x^*)=\sup\left\{\langle x^*,x\rangle-\frac{1}{p}\|x\|^p\right\}$$

$$=\sup_{t>0}\left\{\|x^*\|t-\frac{1}{p}t^p\right\}=\frac{1}{p'}\|x^*\|^{p'}.$$

既然 φ^* 还是一个 $\not\equiv+\infty$ 的凸、下半连续函数，那么还可以再定义它的共轭函数，称为 φ 的**双共轭函数**：

$$\varphi^{**}(x^{**})=\sup_{x^{**}\in\mathscr{X}^{**}}\{\langle x^{**},x^*\rangle-\varphi^*(x^*)\},$$

其中 $\langle,\rangle$ 表示 $\mathscr{X}^{**}$ 与 $\mathscr{X}^*$ 的对偶，当然 φ^{**} 是定义在 $\mathscr{X}^{**}$ 上的。但有时，我们也把 φ^{**} 在 $\mathscr{X}$ 上的限制称为双共轭函数，仍记作 φ^{**}。当 $\mathscr{X}$ 自反时，这两种概念是一致的。我们有

定理 2.2(Fenchel-Moreau)　设 φ 凸、下半连续，并且 $\not\equiv+\infty$；则 $\varphi^{**}=\varphi$.

证明 1　先设 $\varphi\geqslant0$. 从 Young 不等式及 φ^{**} 的定义，显然有 $\varphi^{**}\leqslant\varphi$. 为证二者相等，采用反证法。倘若有一点 $x_0\in\mathscr{X}$，使得

$$\varphi^{**}(x_0)<\varphi(x_0).$$

现在在空间 $\mathscr{X}\times\mathbb{R}^1$ 上，对下面两个凸集合

$$A=\operatorname{epi}\varphi \triangleq \{(x,t)\in \mathscr{X}\times \mathbb{R}^1 \mid \varphi(x)<+\infty,\ t\geqslant \varphi(x)\},$$
$$B=\{(x_0,\ \varphi^{**}(x_0))\}$$

应用 Hahn-Banach 定理，于是有 $(\mathbf{f},k)\in \mathscr{X}^*\times \mathbb{R}^1$ 以及 $\alpha\in \mathbb{R}^1$ 使得：

$$\langle \mathbf{f},x\rangle+kt>\alpha,\quad \forall (x,t)\in \operatorname{epi}\varphi, \tag{2.2}$$
$$\langle \mathbf{f},x_0\rangle+k\varphi^{**}(x_0)<\alpha. \tag{2.3}$$

由不等式(2.2)推得 $k\geqslant 0$.

设 $\varepsilon>0$，因为 $\varphi\geqslant 0$，由(2.2)可见

$$\langle \mathbf{f},x\rangle+(k+\varepsilon)\varphi(x)\geqslant \alpha,$$
$$\forall x\in D(\varphi)\triangleq\{x\in \mathscr{X}\mid \varphi(x)<+\infty\}.$$

于是有 $$\varphi^*\left(-\frac{\mathbf{f}}{k+\varepsilon}\right)\leqslant -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

按 $\varphi^{**}(x_0)$ 的定义便得到

$$\varphi^{**}(x_0)\geqslant\left\langle -\frac{\mathbf{f}}{k+\varepsilon},\ x_0\right\rangle-\varphi^*\left(-\frac{\mathbf{f}}{k+\varepsilon}\right)$$
$$\geqslant\left\langle -\frac{\mathbf{f}}{k+\varepsilon},\ x_0\right\rangle+\frac{\alpha}{k+\varepsilon},$$

即 $$\langle \mathbf{f},x_0\rangle+(k+\varepsilon)\varphi^{**}(x_0)\geqslant\alpha,\quad \forall \varepsilon>0.$$

这便与(6.3)矛盾.

2° 对一般的 φ，按 5°，$D(\varphi^*)\neq\emptyset$，取 $x_0^*\in D(\varphi^*)$. 为化到情况 1°，我们引入函数

$$\bar{\varphi}(x)=\varphi(x)-\langle x_0^*,x\rangle+\varphi^*(x_0^*),$$

则 $\bar{\varphi}$ 是凸的、下半连续的，并且 $\not\equiv +\infty$；还满足 $\bar{\varphi}\geqslant 0$. 现在按第 1° 段的结论：$\bar{\varphi}^{**}=\bar{\varphi}$. 然而，

$$\bar{\varphi}^*(x^*)=\varphi^*(x^*+x_0^*)-\varphi^*(x_0^*),$$
$$\bar{\varphi}^{**}(x)=\varphi^{**}(x)-\langle x_0^*,x\rangle+\varphi^*(x_0^*),$$

即得 $\varphi^{**}=\varphi$.

推论 2.2 设 φ 是一个凸的下半连续函数，满足 $\varphi\not\equiv+\infty$；那么为了 $x^*\in\partial\varphi(x)$ 必须且仅须

$$x\in\partial\varphi^*(x^*).$$

证明　由于 $x^*\in\partial\varphi(x)\Leftrightarrow\langle x^*, x\rangle=\varphi(x)+\varphi^*(x^*)$

$$=\varphi^{**}(x)+\varphi^*(x^*)$$

$$\Leftrightarrow x\in\partial\varphi^*(x^*).$$

函数 $\varphi: \mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$ 称为是严格凸的，是指

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y),$$

$$\forall x, y\in\mathscr{X}, \forall\lambda\in(0, 1)$$

其中 $x\neq y$.

容易验证：

φ 严格凸与下列每条等价：

(1) $\varphi(x)+\langle x^*, y-x\rangle<\varphi(y)$　$\forall x, y, y\neq x, \forall x^*\in\partial\varphi(x)$.

(2) $\langle y^*-x^*, y-x\rangle>0$, $\forall x, y\in\mathscr{X}, x^*\in\partial\varphi(x), y^*\in\partial\varphi(y)$, $x\neq y$.

推论 2.3　设 $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ 严格凸，则 φ^* 在其定义域内部 $(\varphi^*(x^*)\neq+\infty)$ 连续可微，并且还是严格凸的.

证明　按上述等价性质(2)，当 $x\neq y$ 时，$\varphi'(x)\neq\varphi'(y)$. 再由推论 2.2，$\partial\varphi^*(x^*)$ 是单点集，当 $\varphi^*(x^*)\neq+\infty$. 应用 §2.1 性质 4°，$\varphi^*$ 在 x^* 是 Frechet 可微的. 再证：$\varphi^{*\prime}$ 在 x^* 处连续. 事实上，若 $x_n^*\to x^*$，且 $\xi_n\in\partial\varphi^*(x_n^*)$，则得

$$\langle\xi_n, y^*-x_n^*\rangle\leqslant\varphi^*(y^*)-\varphi^*(x_n^*),\quad\forall y^*\in\mathbb{R}^n.$$

由 $\|\xi_n\|$ 有界，推得：ξ_n 弱收敛到某个 ξ_0，从而 $\xi_0\in\partial\varphi^*(x^*)$，即 $\xi_0=\varphi^{*\prime}(x^*)$. 但因 $\mathbb{R}^n$ 上弱收敛与强收敛等价. 即得 φ^* 在 x^* 连续可微. 再利用 $\langle y^*-x^*, \varphi^{*\prime}(y^*)-\varphi^{*\prime}(x^*)\rangle=\langle y^*-x^*, y-x\rangle>0$，推得 φ^* 是严格凸的.

2.3 非光滑分析

对于 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上定义的局部 Lip. 函数 $f: \mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$，即 $f\in C^{1-0}$，一般说来，它既不可微，也不凸. 对这类函数，也可以推广导数的概念并发展微分法，从而讨论变分问题.

首先对于给定的方向 $h\in\mathscr{X}$，定义广义方向导数：

$$\mathbf{f}^{\circ}(x_0, h)=\overline{\lim_{\substack{w\to\theta\\ \lambda\downarrow 0}}}\frac{1}{\lambda}[\mathbf{f}(x_0+w+\lambda h)-\mathbf{f}(x_0+w)].$$

不难验证下列性质:

(1) 函数 $h\mapsto\mathbf{f}^{\circ}(x_0, h)$是次可加、正齐次的,从而是凸的.

证明 正齐性由定义立得.次可加性验证如下:

设 $h_1, h_2\in\mathscr{X}$,则

$$\begin{aligned}f^{\circ}(x_0, h_1+h_2)&=\overline{\lim_{w\to\theta,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}[\mathbf{f}(x_0+w+\lambda h_1+\lambda h_2)-\mathbf{f}(x_0+w)]\\&\leqslant\overline{\lim_{w\to\theta,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}[\mathbf{f}(x_0+w+\lambda h_1+\lambda h_2)\\&\quad-\mathbf{f}(x_0+w+\lambda h_2)]\\&\quad+\overline{\lim_{w\to\theta,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}[\mathbf{f}(x_0+w+\lambda h_2)-\mathbf{f}(x_0+w)]\\&=f^{\circ}(x_0, h_1)+f^{\circ}(x_0, h_2).\end{aligned}$$

(2) $\exists$常数 $K=K(x_0)$及邻域 $U(x_0)$使得

$$|\mathbf{f}^{\circ}(x_0, h)|\leqslant K\|h\|, \ \forall x\in U(x_0), \ \forall h\in\mathscr{X}.$$

(3) $h\mapsto\mathbf{f}^{\circ}(x_0, h)$是连续的 Lip. 函数.

证明 由(1)与(2),$\forall h, h'\in\mathscr{X}$,

$$\mathbf{f}^{\circ}(x_0, h)-\mathbf{f}^{\circ}(x_0, h')\leqslant\mathbf{f}^{\circ}(x_0, h-h')\leqslant K\|h-h'\|$$

即得: $$|\mathbf{f}^{\circ}(x_0, h)-\mathbf{f}^{\circ}(x_0, h')|\leqslant K\|h-h'\|.$$

(4) $\mathbf{f}^{\circ}(x_0-h)=(-\mathbf{f})^{\circ}(x_0, h)$.

证明 $$\begin{aligned}\mathbf{f}^{\circ}(x_0, -h)&=\overline{\lim_{w\to\theta,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}[\mathbf{f}(x_0+w-\lambda h)-\mathbf{f}(x_0+w)]\\&=\overline{\lim_{w\to\theta,\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}[-\mathbf{f}(x_0+(w-\lambda h)\\&\quad+\lambda h)+\mathbf{f}(x_0+(w-\lambda h))]\\&=(-\mathbf{f})^{\circ}(x_0, h).\end{aligned}$$

广义梯度是通过广义方向导数定义的:

定义 2.1 设 $\mathbf{f}\in C^{1-0}(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$, 我们定义 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处的广义梯度 $\partial\mathbf{f}(x_0)$为凸函数 $h\mapsto\mathbf{f}^{\circ}(x_0, h)$在 θ 点的次微分 $\partial_h\mathbf{f}^{\circ}(x_0, \theta)$,即

$$\{x^*\in\mathscr{X}^*|\langle x^*, h\rangle\leqslant \mathbf{f}^\circ(x_0, h), \forall h\in\mathscr{X}\}.$$

关于广义梯度有下列基本性质：

(1) $\forall x_0\in\mathscr{X}$，$\partial\mathbf{f}(x_0)$是一个非空，*弱紧凸子集.

证明　这是函数 $h\mapsto \mathbf{f}^\circ(x_0, h)$ 的连续、凸性以及 § 2.1 性质 1°，2° 的推论.

(2) $\sup\{\|x^*\|\,|x^*\in\partial\mathbf{f}(x_0)\}\leqslant K$.

证明　联合定义 2.1 及广义方向导数的性质 2°.

(3) $\forall h\in\mathscr{X}$，$\mathbf{f}^\circ(x_0, h)=\max\{\langle x^*, h\rangle|x^*\in\partial\mathbf{f}(x_0)\}$.

证明　令 $g(x_0, h)=\max\{\langle x^*, h\rangle|x^*\in\partial\mathbf{f}(x_0)\}$，则由定义，$g(x_0, h)\leqslant\mathbf{f}^\circ(x_0, h)$. 反过来，倘若有 $h_0\in\mathscr{X}$，使得 $g(x_0, h_0)<\mathbf{f}^\circ(x_0, h_0)$，但因 $\mathbf{f}^\circ(x_0, h)$是 h 的正齐次连续凸函数，由 Hahn-Banach 定理，$\exists x_0^*\in\mathscr{X}^*$，使得 $\langle x_0^*, h_0\rangle=\mathbf{f}^\circ(x_0, h_0)$，$\langle x_0^*, h\rangle\leqslant\mathbf{f}^\circ(x_0, h)$，$\forall h\in\mathscr{X}$. 这蕴含着 $x_0^*\in\partial\mathbf{f}(x_0)$，便导出矛盾.

(4) 设 Ω 是 $\mathscr{X}^*$ 中的非空*弱紧凸子集，则

$$\partial\mathbf{f}(x_0)\subset\Omega\Leftrightarrow\mathbf{f}^\circ(x_0, h)\leqslant\max\{\langle x^*, h\rangle|x^*\in\Omega\}\forall h\in\mathscr{X}.$$

证明　"$\Rightarrow$"显然(由(3)).

"$\Leftarrow$". 倘若 $\exists x_0^*\in\partial\mathbf{f}(x_0)\backslash\Omega$，则将 $\mathscr{X}^*$ 赋予 w^* 拓扑，应用 Hahn-Banach 定理，$\exists h\in(\mathscr{X}^*_{w^*})^*\cong\mathscr{X}$，使得

$$\langle x_0^*, h\rangle>\max\{\langle x^*, h\rangle|x^*\in\Omega\}$$

(参看 Kelley-Namioka[KN1, p. 119, p.155])，便与假设矛盾.

(5) 设 $\mathbf{f}$ 在 x_0 的一个邻域内 Gateaux 可微，并且 G-导数还是连续的，则 $\partial\mathbf{f}(x_0)=\{\mathbf{f}'(x_0)\}$.

证明　$\forall h\in\mathscr{X}$，$w\in\mathscr{X}$ 及 $\lambda>0$，取 $\|w\|+\lambda$ 足够小，由中值定理，$\exists\lambda^*\in(0, \lambda)$使得

$$\frac{1}{\lambda}[\mathbf{f}(x_0+w+\lambda h)-\mathbf{f}(x_0+w)]=\langle\mathbf{f}'(x_0+w+\lambda^*h), h\rangle;$$

由此导出 $\mathbf{f}^\circ(x_0, h)=\langle\mathbf{f}'(x_0), h\rangle$. 即得 $\partial\mathbf{f}(x_0)=\{\mathbf{f}'(x_0)\}$.

(6) $x\mapsto\partial\mathbf{f}(x)$ 是*弱上半连续的，即 $\forall x_0\in\mathscr{X}$，$\forall\varepsilon>0$，$\forall h\in\mathscr{X}$，$\exists\delta=\delta(x_0, h, \varepsilon)>0$，使得当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，$\forall w\in\partial\mathbf{f}(x)$ 都有 $w_0\in\partial\mathbf{f}(x_0)$使得

$$|\langle w-w_0,\ h\rangle|<\varepsilon.$$

证明 倘若不然，$\exists x_0\in\mathscr{X}$，$h_0\in\mathscr{X}$，$\varepsilon_0>0$ 以及 $x_n\in\mathscr{X}$，$\xi_n\in\partial\mathbf{f}(x_n)$适合

$$\|x_n-x_0\|<\frac{1}{n};\ |\langle\xi_n-w,\ h_0\rangle|\geqslant\varepsilon_0\quad\forall w\in\partial\mathbf{f}(x_0). \tag{2.4}$$

因为$\{x_n\}$在x_0的邻域内，由性质(2)，$\|\xi_n\|\leqslant K$．从而有子列$\xi_{ni}\rightharpoonup\xi_0$(*弱)．将证：$\xi_0\in\partial\mathbf{f}(x_0)$．事实上，$\forall h\in\mathscr{X}$，$\exists w_i\to 0$，$\lambda_i\downarrow 0$ 使得

$$\frac{1}{\lambda_i}[\mathbf{f}(x_{ni}+w_i+\lambda_i h)-\mathbf{f}(x_{ni}+w_i)]>\langle\xi_{ni},\ h\rangle-\frac{1}{i},\quad i=1,\ 2,$$

…，于是有

$$\mathbf{f}^\circ(x_0,\ h)\geqslant\langle\xi_0,\ h\rangle,\quad\forall h\in\mathscr{X},$$

即得$\xi_0\in\partial\mathbf{f}(x_0)$．现在在(2.4)中取$w=\xi_0$，即得矛盾．

还可以证明(从略，参看[ClF 1])广义梯度是次微分的推广．即

(7) 若 $\mathbf{f}$ 是连续凸函数，则 $\partial\mathbf{f}(x)$ 作为广义梯度与作为次微分是一致的．

(8) $\lambda(x)\triangleq\mathrm{Min}\{\|w\|_{\mathscr{X}^*}|w\in\partial\mathbf{f}(x)\}$ 存在，是一个下半连续函数．

证明 函数 $w\mapsto\|w\|$是*弱下半连续的，又由(1)，$\partial\mathbf{f}(x)$是非空*弱紧凸集；所以 $\forall x_0\in\mathscr{X}$，$\exists w_0\in\partial\mathbf{f}(x_0)$使得

$$\|w_0\|_{\mathscr{X}^*}=\inf\{\|w\|_{\mathscr{X}^*}|w\in\partial\mathbf{f}(x_0)\}.$$

再证 λ 的下半连续性．倘若不然，$\exists x_n\to x_0$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\lambda(x_n)<\lambda(x_0).$$

设 $w_n\in\partial\mathbf{f}(x_n)$ 为使 $\|w_n\|=\lambda(x_n)$，$n=1$，…，的点，则必有子列 $w_{ni}\overset{*}{\rightharpoonup}w_0\in\partial\mathbf{f}(x_0)$(根据性质 6)，但

$$\varliminf_{i\to\infty}\|w_{ni}\|\geqslant\|w_0\|\geqslant\lambda(x_0),$$

这是一个矛盾．

(9) 设 $\phi\in C^1([0,\ 1],\ \mathscr{X})$，并且 $\mathbf{f}\in C^{1-0}(\mathscr{X},\ \mathbb{R}^1)$，则 $h=f\circ\phi$：$[0,\ 1]\to\mathbb{R}^1$ 几乎处处可微，并且

$$h'(t)\leqslant\max\{\langle x^*,\ \phi'(t)\rangle|x^*\in\partial\mathbf{f}(\phi(t))\}\ \text{a.e.}.$$

证明 因为$h\in C^{1-0}[0,1]$，所以它 a. e. 可微．设 t_0 是一个可微点，则

$$\begin{aligned}
h'(t_0)&=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[\mathbf{f}\circ\phi(t_0+\lambda)-\mathbf{f}\circ\phi(t_0)]\\
&=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[\mathbf{f}(\phi(t_0)+\phi'(t_0)\lambda+o(\lambda))-\mathbf{f}(\phi(t_0))]\\
&=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[\mathbf{f}(\phi(t_0)+\phi'(t_0)\lambda)-\mathbf{f}(\phi(t_0))]\\
&\leqslant\varlimsup_{\substack{h\to 0\\ \lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda}[\mathbf{f}(\phi(t_0)+h+\phi'(t_0)\lambda)-\mathbf{f}(\phi(t_0)+h)]\\
&=\mathbf{f}^\circ(\phi(t_0),\ \phi'(t_0))\\
&=\max\{\langle x^*,\ \phi'(t_0)\rangle\mid x^*\in\partial\mathbf{f}(\phi(t_0))\}.
\end{aligned}$$

(10) $\partial(\mathbf{f}+g)(x_0)\subset\partial\mathbf{f}(x_0)+\partial g(x_0)$.

证明 由定义直接有

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{f}+g)^\circ(x_0,h)\\
&\quad\leqslant\mathbf{f}^\circ(x_0,h)+g^\circ(x_0,h)\\
&\quad\leqslant\max\{\langle x^*,h\rangle\mid x^*\in\partial\mathbf{f}(x_0)+\partial g(x_0)\},
\end{aligned}$$

再利用性质(5)，即得结论．

(11) 设 x_0 是 $\mathbf{f}$ 的局部极小，则 $\theta\in\partial\mathbf{f}(x_0)$．

证明 由定义，$\mathbf{f}^\circ(x_0,h)\geqslant 0\quad\forall h\in\mathscr{X}$，从而有 $\theta\in\partial\mathbf{f}(x_0)$．

(12) 设 $\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_n$ 是局部 Lip. 函数，$m(x)=\max\{\mathbf{f}_i(x)\mid i=1,\cdots,n\}$，则

$$\partial m(x)\subset Co\{\partial\mathbf{f}_i(x)\mid i\in M(x)\}\ (Co\ \text{表示凸包})$$

其中 $M(x)$ 是那些在 x 点使得 $\mathbf{f}_i(x)=m(x)$ 的指标集．

证明 直接利用定义，

$$m^\circ(x,h)\leqslant\max\{\mathbf{f}_i^\circ(x,h)\mid i\in M(x)\}.$$

取 $\Omega=Co\{\partial\mathbf{f}_i(x)\mid i\in M(x)\}$，则 Ω 是非空 * 弱紧凸集，从而有

$$\max\{\langle x^*,h\rangle\mid x^*\in\Omega\}=\max\{\mathbf{f}_i^\circ(x,h)\mid i\in M(x)\},$$

再用性质(4)导出结论．

本节的主要结果是在非光滑函数类中推广 Люстерник 定理．

定理 2.9 设 $\mathbf{f},g_1,\cdots,g_n$ 都是 $\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$ 的局部 Lip. 函数．

又设 x_0 是在约束 $\bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(0)$ 下，$\mathbf{f}$ 的极小值点，则必有 $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ 不全为 0，使得

$$\theta\in\lambda_0\partial\mathbf{f}(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\partial g_i(x_0).$$

证明 令 $\varepsilon\in(0, 1)$，定义函数

$$F(x)=\max\{\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(x_0)+\varepsilon,\ |g_i(x)|,\ i=1, \cdots, n\},$$

则 F 是局部 Lip. 函数，并且非负，满足：$F(x_0)=\varepsilon$.

应用定理 1.4，$\exists z_\varepsilon\in\mathscr{X}$ 使得

$$\|x_0-z_\varepsilon\|\leqslant\sqrt{\varepsilon}, \tag{2.5}$$

$$F(x)+\sqrt{\varepsilon}\,\|x-z_\varepsilon\|\geqslant F(z_\varepsilon)\quad \forall x\in\mathscr{X}. \tag{2.6}$$

注意到 $F(z_\varepsilon)>0$，因若有 $F(z_\varepsilon)=0$，则必 $z_\varepsilon\in\bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(0)$，而且 $\mathbf{f}(z_\varepsilon)=\mathbf{f}(x_0)-\varepsilon<\mathbf{f}(x_0)$；这当然是不可能的．而(2.6)表明 z_ε 是函数 $\phi(x)\triangleq F(x)+\sqrt{\varepsilon}\,\|x-z_\varepsilon\|$ 的极小点．应用性质(11)可得

$$\theta\in\partial\phi(z_\varepsilon)\subset\partial F(z_\varepsilon)+\sqrt{\varepsilon}\,B_1^*.$$

其中 B_1^* 是 $\mathscr{X}^*$ 中的单位球．而由性质(10)与(12)，

$$\begin{aligned}\partial F(z_\varepsilon)&\subset\overline{\mathrm{Co}}\left\{\partial\mathbf{f}(z_\varepsilon),\ \partial|g_i|(z_\varepsilon)\ \Big|\ |g_i(z_\varepsilon)|=F(z_\varepsilon)\right\}\\&\subset\bigcup\left\{\sigma_0\partial\mathbf{f}(z_\varepsilon)+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i'\partial g_i(z_\varepsilon)\ \Big|\ \sigma_i'=\pm\sigma_i,\right.\\&\qquad\left.\sigma_i\geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{n}\sigma_i=1\right\}.\end{aligned}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$z_\varepsilon\to x_0$，由性质(6)，有不全为 0 的 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 使得 $\theta\in\lambda_0\partial\mathbf{f}(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\partial g_i(x_0)$.

§3 应用与例

极值理论在微分方程理论中有广泛的应用，成为求解偏微分方程问题的变分方法．本节不准备花费太多的笔墨于这一传统的专题，而是把重点放在应用这一理论的新的技巧方面．在这一节举了五个例子．例 1 是经典的，主要是想说明在微分方程问题中

弱下半连续性与强制性通常是怎样验证的. 例 2 是凸分析的应用, 连同例 3 中的定理 3.2′ (非光滑分析的应用), 讨论一类集值微分方程问题. 这类方程在许多数学物理自由边值问题中出现. 例 3 讨论非线性本征值问题. 例 4 介绍 Nehari 技巧, 这种技巧, 把本来不适宜用极小值方法求解的一类方程, 设法限制到一个子流形上, 使解对应于约束泛函的极小值点. 例 5 讨论算子具有稠密值域的问题, 用以说明 § 1 中 Ekeland 定理的其它应用.

例 1 研究下列变分问题: 求极小

$$J(u)=\int_{\Omega}F(x,\,u(x),\,\nabla u(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$u\in \mathring{W}^1_p(\Omega),\ 1<p<\infty,$$

其中 $F\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{nN})$, 对 $\forall x\in\Omega, F(x,\,\cdot)\in C^1(\mathbb{R}^{N(n+1)})$, 而 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界可测集. 又设有常数 $\nu>0$, 使得

$$F(x,\,u,\,\xi)\geqslant\nu|\xi|^p, \tag{3.1}$$

$$\forall(x,\,u)\in\Omega\times\mathbb{R}^N,\ F(x,\,u,\,\xi)\text{对 }\xi\text{ 是凸的}. \tag{3.2}$$

定理 3.1 在假设(3.1)与(3.2)之下, J 达到极小值.

证明 J 显然有下界, $J\not\equiv+\infty$, 并满足强制条件:

$$\int F(x,\,u,\,\nabla u)\geqslant\nu\int|\nabla u|^p\geqslant\nu_0\|u\|^p_{W^1_p}\to+\infty,$$

当 $\|u\|_{W^1_p}\to\infty$, 其中 $\nu_0>0$ 是一常数. 关键是看弱下半连续性. 设 $u_n\rightharpoonup u(\mathring{W}^1_p(\Omega))$ 弱, 则 $u_n\to u(L^p(\Omega))$ 强. 由其中可抽出子列, 不妨仍记作 u_n 使得 $u_n\to u$ a. e. 于 Ω. 再按 Егоров 定理, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\Omega_\varepsilon\subset\Omega$ 使得 $\operatorname{mes}(\Omega_\varepsilon)\geqslant\operatorname{mes}(\Omega)-\varepsilon$, 并且 $u_n(x)\to u(x)$ 在 Ω_ε 上一致收敛. 令

$$\Omega_{\varepsilon,M}=\{x\in\Omega_\varepsilon\,|\,|u(x)|\leqslant M\},$$

则 $\operatorname{mes}(\Omega\backslash\Omega_{\varepsilon,M})\to0$ 当 $\varepsilon\to0$, $M\to+\infty$. 当 $u,\,v\in\mathring{W}^1_p(\Omega)$ 时令

$$J_{\varepsilon,M}(u,\,v)=\int_{\Omega_{\varepsilon,M}}F(x,\,u(x),\,\nabla v(x)),$$

和

$$J_{\varepsilon,M}(u)=J_{\varepsilon,M}(u,\,u),$$

则

$$\begin{aligned}J_{\varepsilon,M}(u_n)-J_{\varepsilon,M}(u)=&(J_{\varepsilon,M}(u_n,\,u_n)-J_{\varepsilon,M}(u_n,\,u))\\&+(J_{\varepsilon,M}(u_n,\,u)-J_{\varepsilon,M}(u,\,u)).\end{aligned}$$

由假设(3.2)

$$J_{\varepsilon,M}(u_n, u_n) - J_{\varepsilon,M}(u_n, u) \geqslant \int_{\Omega_{\varepsilon,M}} F_\xi(x, u_n, \nabla u)(\nabla u_n - \nabla u). \tag{3.3}$$

但在 $\Omega_{\varepsilon,M}$ 上,

$$F_\xi(x, u_n, \nabla u) \to F_\xi(x, u, \nabla u) \text{一致}.$$

又 $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u(L^p(\Omega))$, 所以(3.3)式右端$\to 0$, 当 $n\to\infty$, 即得

$$\varliminf_{n\to\infty} [J_{\varepsilon,M}(u_n) - J_{\varepsilon,M}(u_n, u)] \geqslant 0$$

另一方面, 在 $\Omega_{\varepsilon,M}$ 上,

$$F(x, u_n, \nabla u) \to F(x, u, \nabla u) \text{一致}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} J_{\varepsilon,M}(u_n, u) = J_{\varepsilon,M}(u)$. 合起来便是

$$\varliminf_{n\to\infty} J_{\varepsilon,M}(u_n) \geqslant J_{\varepsilon,M}(u).$$

又因为 $F\geqslant 0$, 所以 $J(u_n) \geqslant J_{\varepsilon,M}(u_n)$, 即得

$$\varliminf_{n\to\infty} J(u_n) \geqslant J_{\varepsilon,M}(u).$$

再令 $\varepsilon\to 0$, $M\to+\infty$, 按积分的连续性,

$$\varliminf_{n\to\infty} J(u_n) \geqslant J(u).$$

现在应用定理 1.1, 即得结论.

注 3.1 条件(3.1)中的 $p>1$ 是很关键的. 因为只在这时, 可以取自反空间 $\mathring{W}_p^1(\Omega)$, 使得 J 在其上是强制的. 但不幸的是极小曲面方程问题

$$\begin{cases} \min \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2} \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \text{ 是给定函数}, \end{cases}$$

却被排除在外.

为了求解象极小曲面方程这类问题, 在使用变分方法时, 还要利用方程自身的特性, 特别是对方程的解作先验估计.

例 1 对应着的微分方程组是(J 的 Euler 方程):

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F_{\xi_{ij}}(x, u(x), \nabla u(x)) + F_{u_j}(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \tag{3.4}$$

$i=1, 2, \cdots, N$, 连同边界条件

$$u_i(x)|_{\partial\Omega}=0.$$

为导出(3.4), 还要对 F_{u_i} 及 $F_{\xi_{ij}}$ 的增涨性作下列限制, 例如设 $p=2$, 则

$$|F_\xi(x, u, \xi)|\leqslant C(1+|u|^{\frac{n}{n-2}}+|\xi|),$$

$$|F_u(x, u, \xi)|\leqslant C(1+|u|^{\frac{n+2}{n-2}}+|\xi|^{\frac{n+2}{n}})$$

其中 C 是一个常数(参看第一章 § 5.3).

变分问题的解, 即 J 的极小值点, 只是方程组(3.4)的一个"弱解"; 为了得到古典解, 还要靠方程组(3.4)的解的先验估计.

作为凸函数次微分概念的应用, 我们还有

例 2 设 $\beta: \mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 是一个单调不减函数, 满足增涨性条件:

$$|\beta(t)|\leqslant C_1+C_2|t|^{\frac{n+2}{n-2}},$$

则方程

$$\begin{cases}\Delta u\in[\beta(u(x)-0),\ \beta(u(x)+0)]\\ u\in H_0^1\cap H^2(\Omega)\end{cases}\tag{3.5}$$

有解.

证明 考察下列变分问题:

$$J(u)=\int\frac{(\nabla u)^2}{2}+\varphi(u),\ u\in H_0^1(\Omega),\tag{3.6}$$

其中

$$\varphi(t)=\int_0^t\beta(s)ds\tag{3.7}$$

按 § 3.1, 性质 6° 与推论 3.1,

$$\theta\in\partial J(u), \Leftrightarrow \int\nabla u\cdot\nabla v+w(x)\cdot v=0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

其中 $w\in[\beta(u(x)-0),\ \beta(u(x)+0)]$ 可测. 由弱解的正则性, 后者导出 $u\in H^2(\Omega)$, 并且

$$\Delta u\in[\beta(u(x)-0),\ \beta(u(x)+0)].$$

为求泛函(3.6)的极小值, 只须注意 $\varphi(t)$ 是下方有界的连续凸函数, 从而 $J(u)$ 是下半连续的、强制的、凸泛函, 应用推论 1.1, J

达到极小值点.

注 3.2 方程(3.5)的解,由极值原理,是唯一的.

以上两例都是把所求解的微分方程看成是某个泛函的 Euler 方程.从而把求解方程的问题化归这泛函的极值问题.从约束极值问题出发可以自然地对应着微分方程的非线性本征值问题.事实上,由定理 1.5,为求解方程

$$\mathbf{f}'(x)=\lambda g'(x)$$

其中 $\mathbf{f}, g\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$,只须在 $M_c=\{x\in\mathscr{X}\mid g(x)=c\}\neq\emptyset$ 上,验证 $g'(x)\neq\theta$, $\forall x\in M_c$,然后求 $\mathbf{f}|_{M_c}$ 的极值点.

例 3 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个具光滑边界的有界区域,$h\in C(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$满足下列增涨条件:

$$|h(x,t)|\leqslant C_1+C_2|t|^\alpha,\ \alpha<\frac{n+2}{n-2};\tag{3.8}$$

以及假设:

$$h(x,0)=0,\tag{3.9}$$

$$h(x,t)t>0\quad \forall t\neq 0.\tag{3.10}$$

考察下列非线性本征值问题:

$$\begin{cases}-\Delta u(x)=\lambda h(x,u(x)),\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{3.11}$$

定理 3.2 $\exists c_0>0$,使得对一切 $c\in(0,c_0)$,方程(3.11)有解(λ_c, u_c)满足:

$$\int_\Omega\int_0^{u_c(x)}h(x,t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=c.$$

证明 取空间 $\mathscr{X}=H_0^1(\Omega)$,令

$$\mathbf{f}(u)=\frac{1}{2}\int(\nabla u)^2\mathrm{d}x,$$

$$g(u)=\int H(x,u(x))\mathrm{d}x,$$

其中
$$H(x,t)=\int_0^t h(x,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

由于 $\mathscr{X}$ 自反,$\mathbf{f}$, g 都可微;并且 $\mathbf{f}$ 凸、下半连续,应用定理 1.2,

它弱下半连续. 进而, 当 $u_n \rightharpoonup u(H_0^1(\Omega))$ 时, 应用嵌入定理以及第一章定理 1.1,

$$\int H(x, u_n(x)) \to \int H(x, u(x)),$$

即得 g 是 $H_0^1(\Omega)$ 上全连续的. 此外, 显然有

$$g(\theta)=0$$

以及 $$(g'(u), v)=\int h(x, u(x))v(x)\mathrm{d}x, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

从而 $g'(u)=\theta \Rightarrow u=\theta$ (由条件 (3.10)). 应用定理 1.6, 以及 (3.10), $\exists c_0>0$, 使得

$$M_{c_0}=\{u\in H_0^1(\Omega) \mid g(u)=c_0\}\neq\emptyset,$$

并且有解 $(\lambda_{c_0}, u_{c_0})\in\mathbb{R}^1\times M_{c_0}$ 适合(3.11). 现在证: $\forall c\in(0, c_0)$, $M_c\neq\emptyset$; 并且 $h(x, u(x))\neq 0$, $\forall u\in M_c$. 这是由于

$$t\mapsto\int_\Omega H(x, tu_{c_0}(x))\mathrm{d}x$$

是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 当 $t=0$ 时, 它是 0; 而当 $t=1$ 时, 它是 c_0; 于是它跑遍区间 $[0, c_0]$. 而在 M_c 上, $h(x, u)\neq\theta$, 还是由条件 (3.10) 推得.

注 3.3 定理 3.2 中, 条件(3.9)实际上已被(3.10)蕴含, 所以添上这条件, 是因为往往把(3.11)看成一个分歧问题. (3.9)强调出, $u=\theta$ 是(3.11)的解 $(\forall\lambda\in\mathbb{R}^1)$. 有兴趣的问题在于寻求非平凡解 (λ_c, u_c).

作为非光滑分析的一个应用, 我们还有

定理 3.2′ 设 $\phi(t)$ 是一个可测函数, 满足条件: $\phi(t\pm 0)$ 存在 $\forall t\in\mathbb{R}^1$, 以及增涨性限制:

$$|\phi(t)|\leqslant c_1+c_2|t|^\alpha, \quad \alpha<\frac{n+2}{n-2}. \tag{3.12}$$

如果 $$\underline{\phi}(t)\triangleq\min\{\phi(t+0), \phi(t-0)\}>0 \quad \forall t>0,$$

$$\overline{\phi}(t)\triangleq\max\{\phi(t+0), \phi(t-0)\}<0 \quad \forall t<0;$$

则必存在 $(\lambda, \mu)\in(\mathbb{R}^1\backslash\{0\})\times(H^2\cap H_0^1(\Omega)\backslash\{\theta\})$ 适合:

$$\begin{cases} \Delta u \in \lambda[\underline{\phi}(u),\ \overline{\phi}(u)], \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

根据同样方法论证，现在我们只要看下列局部 Lipschitz 泛函

$$g(u) = \int \Phi(u(x))\mathrm{d}x$$

的广义梯度.

先求 $\Phi(t)$ 的广义梯度：因为

$$\Phi^\circ(t,\ z) = \varlimsup_{\substack{h\to 0\\ \lambda\downarrow 0}} \frac{1}{\lambda}\int_{t+h}^{t+h+\lambda z} \phi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant \begin{cases} \overline{\phi}(t)z, & \text{当 } z>0, \\ \underline{\phi}(t)z, & \text{当 } z<0; \end{cases}$$

所以 $$\partial\Phi(t) \subset [\underline{\phi}(t),\ \overline{\phi}(t)].$$

另一方面 $$\phi(t\pm 0)z \leqslant \Phi^\circ(t,\ z),\quad \forall z$$

而 $\partial\Phi(t)$ 应是一个闭区间（闭凸集），所以有

$$\partial\Phi(t) = [\underline{\phi}(t),\ \overline{\phi}(t)].$$

再证

定理 3.3 在假设(3.12)下，作为 $L^{\alpha+1}(\Omega)$ 上的泛函 g，有

$$\partial g(u) \subset [\underline{\phi}(u),\ \overline{\phi}(u)].$$

证明 由定义，$\exists h_i \in L^{\alpha+1}$, $h_i \to 0\,(L^{\alpha+1})$使得

$$g^\circ(u,\ v) = \lim_{i\to\infty}\int_\Omega \frac{1}{\lambda_i}\int_{h_i(x)}^{h_i(x)+\lambda_i v(x)} \phi(\xi+u(x))\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x.$$

不妨设 $h_i(x)\to 0$. 几乎处处. 从而

$$\begin{aligned} g^\circ(u,\ v) &\leqslant \int_\Omega \Phi^\circ(u(x),\ v(x))\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \max\{w\cdot v(x)\,|\,w\in\partial_t\phi(u(x))\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{v(x)>0} v(x)\overline{\phi}(u(x)) + \int_{v(x)<0} v(x)\underline{\phi}(u(x)). \end{aligned} \tag{3.13}$$

若 $w\in\partial g(u)$，我们将证：

$$\underline{\phi}(u(x)) \leqslant w(x) \leqslant \overline{\phi}(u(x)),\quad \text{a. e.},$$

若不然，则有一正测集 $E\subset\Omega$，在 E 上，

$$w(x) < \underline{\phi}(u(x))\ (\text{或 } w(x) > \overline{\phi}(u(x))).$$

取 $v(x)=-\chi_E(x)$ 为 E 上的特征函数，则由(3.13)，

$$-\int_E w\mathrm{d}x \leqslant -\int_E \underline{\phi}(u(x))\mathrm{d}x,$$

推得矛盾．同理证：$w(x)\leqslant\overline{\phi}(u(x))$．

为将 $L^{\alpha+1}(\Omega)$ 上的广义梯度限制到 $H_0^1(\Omega)$ 上，我们还要

定理 3.4 设 $\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$ 是两个 Banach 空间，$\mathscr{X}\subsetneq\mathscr{Y}$，即 $\mathscr{X}\subset\mathscr{Y}$，在 $\mathscr{Y}$ 中稠密，并且嵌入映射 i：$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是连续的．又设 φ：$\mathscr{Y}\to\mathbb{R}^1$ 是一个局部 Lip. 函数，若记 $\hat{\varphi}=\varphi|_{\mathscr{X}}$，则

$$\partial\hat{\varphi}(x_0)\subset\partial\varphi(x_0)\quad\forall x_0\in\mathscr{X}.$$

证明 由 § 2.4，广义方向导数的基本性质 (3) 与 (4)，$v\mapsto\varphi^\circ(x, v)$ 是 $\mathscr{Y}$ 上的连续 Lip. 的凸函数，并有

$$\varphi^\circ(x, \cdot)|_{\mathscr{X}}\geqslant\hat{\varphi}^\circ(x, \cdot),$$

再应用 § 2.4，广义梯度的基本性质 7，以及定理 2.1，即得

$$\partial\hat{\varphi}(x_0)\subset\partial\varphi(x_0)\quad\forall x_0\in\mathscr{X}.$$

联合定理 3.3 与 3.4，可见(3.13)定义的 $H_0^1(\Omega)$ 上的局部 Lip. 泛函 g 有

$$\partial g(u)\subset[\underline{\phi}(u), \overline{\phi}(u)]. \tag{3.14}$$

为证定理 3.2′，只需证明(应用定理 2.3)，

$$\theta\in\lambda\partial\left(\frac{1}{2}\int(\nabla u_0)^2\right)+\mu\partial g(u_0)$$

中的 $\lambda\neq0$，其中 $u_0\in M_c=g^{-1}(c)$，$c>0$．事实上，若 $\lambda=0$，则 $\theta\in\mu\partial g(u_0)$，但 $u_0\neq\theta$，这与(3.14)矛盾．其余部分的证明与定理 3.2 相同．

利用约束极值，不仅可以讨论非线性本征值问题，如(3.11)；而且也可以研究不带参数 λ 的微分方程问题．在这方面有许多技巧，使得对给定泛函，适当添加约束后可以达到极值，而这极值点在去掉约束后，就成为原泛函的临界点．下面我们介绍 Nehari [Ne 1] 的一个技巧．

设 $\mathbf{f}\in C^2(H, \mathbb{R}^1)$，其中 H 是一个实 Hilbert 空间，由它出发，定义一个新的泛函

$$g(u)=(\mathbf{f}'(u),\ u)\quad \forall u\in H.$$

显然，$\mathbf{f}$ 的一切临界点，即适合 $\mathbf{f}'(u)=\theta$ 的点，都在集合 $g^{-1}(0)$ 上. 如果在 $M\triangleq g^{-1}(0)$ 上，处处有 $g'(u)\neq\theta$，那么 M 便是一个 Finsler 流形，令

$$\hat{\mathbf{f}}=\mathbf{f}|_M,$$

我们有

定理 3.5 设 $g'(u)\neq\theta\quad\forall u\in M$；则 $\mathbf{f}'(u_0)=\theta$ 蕴含了

$$d\hat{\mathbf{f}}(u_0)=\theta.$$

反之，倘若有 $(g'(u_0),\ u_0)\neq 0,\ u_0\in M$，则 $d\hat{\mathbf{f}}(u_0)=\theta$ 蕴含了

$$\mathbf{f}'(u_0)=\theta.$$

证明 由于

$$d\hat{\mathbf{f}}(u)=\mathbf{f}'(u)-\frac{(\mathbf{f}'(u),\ g'(u))}{\|g'(u)\|^2}g'(u),$$

定理的前一半是显然的. 反过来，利用条件 $(g'(u),\ u)\neq 0\ \forall u\in M$；对任意 $v\in H$，有分解

$$v=\lambda u_0+w,$$

其中

$$(g'(u_0),\ w)=0,$$

$$\lambda=\frac{(g'(u_0),\ v)}{(g'(u_0),u_0)}$$

于是

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}'(u_0),\ v)&=(\mathbf{f}'(u_0),\ w)\\&=(d\hat{\mathbf{f}}(u_0),\ w)+\frac{(\mathbf{f}'(u_0),\ g'(u_0))}{\|g'(u_0)\|^2}(g'(u_0),\ w)\\&=0,\quad\forall v\in H,\end{aligned}$$

即得 $\mathbf{f}'(u_0)=\theta$.

Nehari 技巧可以在许多问题中应用，今举一例：

例 4 考察下列方程

$$\begin{cases}-\Delta u=u^2+f(x),\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{3.15}$$

其中 $f\in L^2(\Omega)$，$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，$n<6$.

作泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\nabla u)^2-\frac{1}{3}\int_{\Omega}u^3-\int_{\Omega}f(x)\cdot u(x),\quad u\in H_0^1(\Omega),$$

则
$$g(u)=\int_{\Omega}[(\nabla u)^2-u^3-f\cdot u],$$

$$h(u)\triangleq(g'(u),\ u)=2\int_{\Omega}(\nabla u)^2-3\int_{\Omega}u^3-\int_{\Omega}f\cdot u.$$

若设

$$\left(\int_{\Omega}|f|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\lambda_1}{4C^3}\tag{3.16}$$

其中 C 是嵌入定理的最佳常数:

$$C=\sup_{u\in H_0^1(\Omega)}\frac{\left(\int_{\Omega}|u|^3\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

而 λ_1 是 $-\Delta$ 的第一本征值; 则 $g^{-1}(0)\cap h^{-1}(0)=\{\theta\}$.

事实上, 若有 $\theta\neq\mu\in g^{-1}(0)\cap h^{-1}(0)$, 则必有

$$\int_{\Omega}(\nabla u)^2=2\int_{\Omega}u^3=2\int f\cdot u.$$

前一个等式导出

$$\int(\nabla u)^2\leqslant 2C^3\left(\int|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

即

$$\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{1}{2C^3}.\tag{3.17}$$

后一个等式导出

$$\int_{\Omega}(\nabla u)^2\leqslant\frac{2}{\lambda_1}\left(\int_{\Omega}f^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

从而有

$$\left(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{2}{\lambda_1}\left(\int_{\Omega}f^2\right)^{\frac{1}{2}},\tag{3.18}$$

这便与(3.17), (3.16)矛盾.

为证(3.15)有解, 只需在 $M=g^{-1}(0)$上考察泛函 $\tilde{J}=J|_M$. 事实上,

$$\tilde{J}(u)=\frac{1}{6}\int|\nabla u|^2-\frac{2}{3}\int f\cdot u\Big|_M=\frac{1}{6}\int u^3-\frac{1}{2}\int fu\Big|_M, \quad (3.19)$$

它显然是下方有界的. 我们还要验证:

$\tilde{J}$ 满足 Palais-Smale 条件, 即

$$\begin{cases}u_n\in M,\\ \tilde{J}(u_n)\text{有界},\ \ d\tilde{J}(u_n)\to\theta;\end{cases}$$

蕴含着: 存在收敛子列 $\{u_{n_i}\}$.

事实上, 由(3.19), $\tilde{J}$ 可以采用下列形式:

$$\tilde{J}(u)=\frac{1}{6}\int u^3-\frac{1}{2}fu,$$

则

$$d\tilde{J}(u)=J'(u)-\frac{(J'(u),\ g'(u))}{\|g'(u)\|^2}g'(u). \quad (3.20)$$

记 $K=(-\Delta)^{-1}$, 则

$$J'(u)=\frac{1}{2}K(u^2-f),\ g'(u)=2u-K(3u^2+f).$$

由 $\tilde{J}(u_n)$有界推出 u_n 有界, 从而有子列, 仍记作 $u_n\rightharpoonup u^*$ $(H_0^1(\Omega))$. 则 $K(u_n^2-f)$以及 $K(3u_n^2+f)$都收敛. 不妨设有子列使 $\|g'(u_n)\|\to\delta\neq 0$, 否则, u_n 收敛已得出. 若再能证明: $(J'(u_n),$ $g'(u_n))\nrightarrow 0$, 则由 $d\tilde{J}(u_n)\to\theta$, 即推得 u_n 强收敛(利用(3.20)). 事实上, 倘若$(J'(u_n),\ g'(u_n))\to 0$, 以及 $d\tilde{J}(u_n)\to\theta$, 由(3.20) 则必 $Ku^{*2}=Kf$, 以及 $2\|u^*\|^2\leqslant\int 3u^{*3}+fu^*$, 即得

$$\|u^*\|^2\leqslant 2\int u^{*3}=2\int fu^*.$$

重复(3.17)到(3.18)的不等式便导出矛盾, 除非 $u^*=\theta$.

当 $f\neq\theta$ 时, $u^*\neq\theta$, P. S. 条件验证完毕. 从而 $M=g^{-1}(0)$上的极小值点 $u_0\neq\theta$ 即是(3.15)的解(这时 $g'(\theta)=-Kf\neq\theta$).

至于 $f=\theta$ 的情形, 同样也是可以回避 $u^*=\theta$ 的. 因为由初等运算可知 $\exists u_1\in M$ 使得 $d=\tilde{J}(u_1)<0$. 于是只须取流形 M 为 $g^{-1}(1)\cap J^{-1}(-\infty,\ d]$, 便把 θ 排除在外了.

于是有结论: 在条件(3.16)之下, 方程(3.15)有解 $u_0\neq\theta$.

例 5　作为定理 1.4 的另一种类型的应用，我们来考察算子具有稠密值域的问题。

设 A 是实 Hilbert 空间 H 上的一个自伴算子，有闭的值域 $R(A)$。又设 $\phi: H \to \mathbb{R}^1$ 有一致连续的导数，并且是严格凸的。假定：

∃实数 α, β, γ 以及 C 使得 $0<\beta\leqslant\gamma<\alpha$,

$$\sigma(A)\cap(-\alpha, 0)=\emptyset, \tag{3.21}$$

$$\beta\frac{\|u\|^2}{2}-C\leqslant\phi(u)\leqslant\gamma\frac{\|u\|^2}{2}+C. \tag{3.22}$$

定理 3.6　在上述假设下，$A+\phi'$ 的值域在 H 上是稠密的。

证明　1° 记 $K: R(A)\to R(A)$ 为 A^{-1}，令 ϕ^* 记 ϕ 的共轭函数，则 ϕ^* 也是凸的，并且有 G–导数 $d\phi^*$: $d\phi^*(x_0, h)=(d\phi^*(x_0), h)$。引入泛函：

$$J(u)=\frac{1}{2}(Ku, u)+\phi^*(u),\ u\in R(A);$$

则 J 连续并有下界。事实上，(3.21)蕴含了

$$(Ku, u)\geqslant-\frac{1}{\alpha}\|u\|^2,$$

而由 §2.2 性质 2 与例 5，(3.22)则蕴含了

$$\phi^*(u)\geqslant\frac{1}{2\gamma}\|u\|^2-C,$$

所以有 $J(u)\geqslant-C$。

2° 由设 ϕ' 一致连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\|x-y\|<\delta$ 时，$\|\phi'(x)-\phi'(y)\|<\varepsilon$。对这 δ，应用推论 1.2 于 J，$\exists u_\varepsilon\in R(A)$，使得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(Ku, u)+\phi^*(u)\\ &\quad\geqslant\frac{1}{2}(Ku_\varepsilon, u_\varepsilon)+\phi^*(u_\varepsilon)-\delta\|u-u_\varepsilon\|,\ \forall u\in R(A).\end{aligned}$$

令 $u=u_\varepsilon+th$, $h\in R(A)$，并令 $t\to0$ 便有

$$-(Ku_\varepsilon, h)\leqslant(d\phi^*(u_\varepsilon), h)+\delta\|h\|.$$

令 $w_s=-Ku_s-P\mathrm{d}\phi^*(u_s)$，其中 P 是 $R(A)$上的正交投影，则 $\|w_s\|\leqslant\delta$. 若令 $v_s=-Ku_s+(I-P)\mathrm{d}\phi^*(u_s)$，则 $v_s\in D(A)$，并且

$$Av_s=-u_s,$$

$$\mathrm{d}\phi^*(u_s)=v_s-w_s.$$

由此得到
$$u_s=\phi'(v_s-w_s),$$
以及
$$\|Av_s+\phi'(v_s)\|=\|\phi'(v_s)-\phi'(v_s-w_s)\|<\varepsilon.$$

注 3.4 算子具有稠密值域的问题，目前也引起人们的兴趣. 参看 H. Biezis, L. Nirenberg[BN, 1] 以及 Coron[Cor 1].

§4 一个几何问题

现在我们来讨论一个微分几何问题：设$(\mathfrak{M}^2, g)$是一个紧致的光滑 2 维 Riemann 流形，具有度量 $g=(g_{ij})$. 问 $\mathfrak{M}^2$ 上是否具有一个与 g 逐点保形的 Riemann 度量 $\bar{g}=(\bar{g}_{ij})$，使得它具有事先给定的 Gauss 曲率 $K(x)$. 在微分几何里，我们知道：为了两个 Riemann 度量是逐点保形的，必须且仅须存在 $\mathfrak{M}^2$ 上的光滑函数 σ 使得 $\bar{g}=e^{2\sigma}g$.

若记 $k(x)\in C^\infty(\mathfrak{M})$ 为对应于 g 的 Gauss 曲率，而 $K(x)\in C^\infty(\mathfrak{M})$为对应于 $\bar{g}$ 的 Gauss 曲率. 上述问题化归为对给定的 k, K，求解 σ 满足方程：

$$\Delta\sigma=k(x)-K(x)e^{2\sigma},\quad x\in\mathfrak{M}^2, \tag{4.1}$$

而其中 Δ 是$(\mathfrak{M}^2, g)$上的 Laplace-Beltrami 算子.

以下用 $\chi(\mathfrak{M})$表示 $\mathfrak{M}$ 的 Euler 示性数，因为有 Gauss-Bonnet 公式

$$\int_{\mathfrak{M}}K(x)\mathrm{d}V=2\pi\chi(\mathfrak{M}).$$

为了(4.1)有解，K 的符号自然应当有所限制.

首先我们把问题(4.1)作一简化. 求解 $w\in W_2^1(\mathfrak{M})$使得

$$\Delta w=k-\bar{k},\ \bar{k}=\int_{\mathfrak{M}}k\,\mathrm{d}V/\mathrm{vol}(\mathfrak{M}), \tag{4.2}$$

再令 $v=2(\sigma-w)$，则(4.1)化归为

$$\Delta v = 2(k - Ke^{2\sigma}) - 2(k - \bar{k})$$
$$= 2\bar{k} - 2Ke^{2w}\cdot e^{v} = c - he^{v}, \qquad (4.3)$$

其中 $c = 2\bar{k}$ 是一个常数，而 $h = 2Ke^{2w}$ 是已知函数．单独考察方程(4.3)，即撇开常数 c 与函数 h 的几何意义，直接讨论方程

$$\Delta v = c - he^{v}$$

的解，其中 c 是常数，而 $h \in C^{\infty}(\mathfrak{M})$，有

定理 4.1 设 $\chi(\mathfrak{M}) > 0$，则当

(1) $\sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} h(x) > 0$,

(2) $\exists c(h) > 0$ 当 $0 < c < c(h)$ 时，

方程(4.3)有解 $v \in C^{\infty}(\mathfrak{M})$，并且有估计

$$c(h) \geqslant 2\beta/\mathrm{vol}(\mathfrak{M}),$$

其中 β 是一个与 $\mathfrak{M}$ 有关的常数．

关于 β 的意义参看下列 Trudinger 引理．

引理 4.1 (Trudinger) 设 $u \in W_2^1(\mathfrak{M}^2)$, $\|\nabla u\|_{L^2(\mathfrak{M})} = 1$, $\int_{\mathfrak{M}} u = 0$，则必有常数 $\beta, \gamma > 0$，使得

$$\int_{\mathfrak{M}} e^{\beta u^2} dV < \gamma.$$

证明 1° 设 $v \in C_0^{\infty}(D)$，其中 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘．证明：$\forall p \geqslant 2$，$\exists$ 常数 c_1 与 v, p 无关，使

$$\|v\|_{L^p} \leqslant c_1\sqrt{p}\,\|\nabla v\|_{L^2}.$$

事实上，由 Соболев 表示

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \nabla v(x-y)\,\frac{y}{|y|^2}\,dy,$$

令

$$\varphi(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{|y|^2}, & |y| \leqslant 2, \\ 0, & |y| > 2. \end{cases}$$

则由 Young 不等式，

$$\|v\|_{L^p} = \frac{1}{2\pi}\|\nabla v * \varphi\|_{L^p}$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\|\varphi\|_{L^r}\|\nabla v\|_{L^2}, \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2} < 1.$$

但 $\|\varphi\|_r=\left(\int_{|y|<2}\frac{dy}{|y|^r}\right)^{\frac{1}{r}}=\left(\frac{2\pi}{2-r}\cdot 2^{2-r}\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant 4(\pi p)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$.

所以有常数 c_1 使得

$$\|v\|_{L^p}\leqslant c_1\sqrt{p}\,\|\nabla v\|_{L^2}.$$

2° 利用单位分解：$u=\sum_{j=1}^{n}\chi_j(x)\cdot u(x)$，其中 χ_j 对应着 $\mathfrak{M}$ 的局部坐标。从而把 $\chi_j u$ 的估计化归 $C_0^\infty(D)$ 上的估计，有

$$\|u\|_{L^p(\mathfrak{M})}\leqslant cp^{\frac{1}{2}}\sum_j(\|\nabla\chi_j\|_{L^\infty(\mathfrak{M})}\|u\|_{L^2(\mathfrak{M})}+\|\chi_j\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2(\mathfrak{M})})\tag{4.4}$$

又因为 $\int_{\mathfrak{M}}u=0$，所以有 Poincaré 不等式：

$$\|u\|_{L^2(\mathfrak{M})}\leqslant c_2\|\nabla u\|_{L^2(\mathfrak{M})}$$

代入(4.4)得

$$\|u\|_{L^p(\mathfrak{M})}\leqslant c_3p^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2(\mathfrak{M})},$$

其中 c_3 与 p, u 无关.

3° $\int_{\mathfrak{M}}e^{\beta u^2}dV=\Sigma\frac{\beta^k}{k!}\|u\|^{2k}_{L^{2k}(\mathfrak{M})}\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2kc_3^2\beta)^k}{k!}\triangleq\gamma$

当 $2\beta c_3^2e<1$.

推论 4.1 存在常数 β 及 γ 使得 $\forall$ 常数 $\alpha>0$,

$$\int_{\mathfrak{M}}e^{\alpha|u|}dV\leqslant\gamma\exp\left[\alpha|\bar{u}|+\frac{(\alpha\|\nabla u\|_{L^2})^2}{4\beta}\right]$$

证明 令 $a=\|\nabla u\|_{L^2}$, $v=(u-\bar{u})/a$，其中 $\bar{u}=\frac{1}{\mathrm{vol}(\mathfrak{M})}\int_{\mathfrak{M}}u$，则 $\bar{v}=0$，并且 $\alpha a|v|\leqslant\beta v^2+(\alpha a)^2/4\beta$，其中 β 是引理 4.1 中的常数.

现在为了求解方程(4.3)，把它化归一个变分问题，更确切地，看成一个限制在 Finsler 流形上的泛函的极小值问题.

引入泛函

$$J(v)=\int_{\mathfrak{M}}\frac{1}{2}(\nabla v)^2+cv$$

以及约束条件

$$M=\left\{v\in W_2^1(\mathfrak{M})\,\Big|\int_{\mathfrak{M}}h\cdot e^v\,dV=C\,\mathrm{vol}(\mathfrak{M})\right\},$$

我们来证明：

1° M 是一个非空的、弱闭的 Finsler 流形，

2° $J|_M$ 是弱下半连续的，

3° $J|_M$ 是强制的，

4° Lagrange 乘子 $\lambda=1$.

引理 4.2　设 $u_n\rightharpoonup u_0(W_2^1(\mathfrak{M}))$，则 $e^{u_n}\to e^{u_0}(L^2(\mathfrak{M}))$.

证明　由不等式

$$\begin{aligned}&\int_{\mathfrak{M}}|e^{u_n}-e^{u_0}|^2\\&\quad=\int e^{2u_0}|e^{(u_n-u_0)}-1|^2\\&\quad\leqslant\int e^{2u_0}|u_n-u_0|^2e^{2|u_n-u_0|}\\&\quad\leqslant\left(\int e^{4u_0}e^{4|u_n-u_0|}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int|u_n-u_0|^4\right)^{\frac{1}{2}}\\&\quad\leqslant\left(\int e^{8u_0}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int e^{8|u_n-u_0|}\right)^{\frac{1}{4}}\|u_n-u_0\|_{L^4}^2\end{aligned}$$

以及紧嵌入 $W_2^1(\mathfrak{M})\to L^4(\mathfrak{M})$，得 $\|u_n-u_0\|_{L^4}\to 0$. 此外，由推论 4.1 可见前两个因子是有界的.

推论 4.2　泛函 $v\mapsto g(v)=\int_{\mathfrak{M}}h\cdot e^v$ 在 $W_2^1(\mathfrak{M})$ 上是 C^1 的，并且弱连续的；$\langle g'(v),w\rangle=\int_{\mathfrak{M}}he^v\cdot w$.

1° 因为 $c>0$ 以及 $\sup\limits_{x\in\mathfrak{M}}h(x)>0$，所以 $M\neq\emptyset$ 并是一个弱闭的 Finsler 流形.

2° 由 $J(v)$ 的定义，它是一个线性泛函与一个半模的平方和，所以显然是弱下半连续的.

3° 兹证 $J(v)$ 是强制的. 事实上，

$$\begin{aligned}J(v)&=\frac{1}{2}\int(\nabla u)^2+\int(Cu+C\bar{v})\\&=\frac{1}{2}\int(\nabla u)^2+C\bar{v}\,\mathrm{vol}(\mathfrak{M}),\end{aligned}\tag{4.5}$$

其中 $u=v-\bar{v}$. 但

$$e^{\bar{v}}\int he^{u}=\int he^{v}=C\,\mathrm{vol}(\mathfrak{M}),$$

所以

$$\bar{v}=\ln[C\,\mathrm{vol}(\mathfrak{M})]-\ln\left[\int he^{u}\right], \tag{4.6}$$

即得
$$J(v)=\int\frac{(\nabla u)^2}{2}+C\,\mathrm{vol}(\mathfrak{M})\ln[C\,\mathrm{vol}(\mathfrak{M})]$$
$$-C\mathrm{vol}(\mathfrak{M})\ln\left[\int he^{u}\right].$$

利用推论 4.1, 还有

$$J(v)\geqslant\int\frac{(\nabla u)^2}{2}-C\,\mathrm{vol}(\mathfrak{M})\ln\left[\gamma e^{\frac{\|\nabla u\|^2}{4\beta}}\right]+\text{常数}$$
$$\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{C\,\mathrm{vol}(\mathfrak{M})}{4\beta}\right)\|\nabla u\|^2_{L^2}+\text{常数},$$

当 $C<2\beta/\mathrm{vol}(\mathfrak{M})$, 以及 $\|u\|^2_{W_2^1(\mathfrak{M})}=\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathfrak{M})}+|\bar{v}|^2\to\infty$ (再用(4.5)与(4.6)), 推得 $J(v)\to+\infty$.

4° 看 Lagrange 乘子 λ. 按定理 1.5, 有 λ 使

$$J'(v)-\lambda h\cdot e^{v}=0,$$

即
$$-\Delta v+C-\lambda he^{v}=0.$$

便得到
$$\lambda\int_{\mathfrak{M}}he^{v}=\int_{\mathfrak{M}}C=C\,\mathrm{vol}(\mathfrak{M}),$$

所以 $\lambda=1$. 现在联合定理 1.1 与 1.5 即得(2.25)弱解存在.

最后, 利用椭圆型方程解的正则性, 只要 $K\in C^{\infty}(\mathfrak{M})$, 即得弱解还是光滑的.

注 4.1 J. Moser 曾估计出 $\mathfrak{M}=S^2$ (球面)以及 P^2 (实射影平面)的 Trudinger 引理中的最佳常数 $\beta=4\pi$(参看 J. Moser [Mo 1]).

回到原始问题. 定理 4.1 中的条件 (1) $\sup\limits_{x\in\mathfrak{M}}h(x)>0\Leftrightarrow\sup\limits_{x\in\mathfrak{M}}K(x)>0$, 在 $\chi(\mathfrak{M})>0$ 的前提下, 这条件是必要的. 而条件(2)中 $C=\int_{\mathfrak{M}}k\,dV/\mathrm{vol}(\mathfrak{M})$ 当然应是正的. 所以条件 (2) 中的

$C<C(h)$才是真正对 k, K 的限制.

现在再考察 $\chi(\mathfrak{M})=0$ 的情形, 有

定理 4.2　设 $\chi(\mathfrak{M})=0$, 则 $\forall K\in C^\infty(\mathfrak{M})$满足:

(1) $K\equiv 0$, 或者

(2) K 变号, 且 $\int_{\mathfrak{M}} Ke^{2w}<0$, 其中 w 是方程(4.2)的解.

两者之一, 则方程(4.3)有解.

证明　和定理 4.1 的证法一样, 但考察泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{M}} (\nabla v)^2 dV$$

以及约束(当 $K\neq 0$ 时)

$$M=\left\{v\in W_2^1(\mathfrak{M})\ \Big|\ \int_{\mathfrak{M}} he^v dV=\int_{\mathfrak{M}} v dV=0\right\}.$$

如今 M 是由两个泛函: $g_1(v)=\int_{\mathfrak{M}} v dV$ 以及 $g_2(v)=\int_{\mathfrak{M}} he^v dV$ 生成的. 按引理 4.2 以及假设 2, M 是 Finsler-C^1 流形, 并是弱闭的. 显然 $J(v)$弱下半连续且是强制的. 应用定理1.1与定理1.5有极小值点 $v_0\in M$ 及 Lagrange 乘子 λ 与 μ 使得

$$-\Delta v_0+\lambda he^{v_0}+\mu=0,$$

由 $v_0\in M$ 推出 $\mu=0$ 以及

$$\lambda\int_{\mathfrak{M}} h dV=\int_{\mathfrak{M}} (\nabla v_0)^2 e^{-v_0} dV>0.$$

从假设 $\int_{\mathfrak{M}} h dV<0$ 推出 $\lambda<0$, 于是令 γ 为常数 $\ln(-\lambda)$. 再令 $u=v_0+\gamma$, 这就是方程(4.3)的解.

若 $K\equiv 0$, 则 $v=$常数显然是解.

注 4.2　定理 4.2 中的(1)或(2)合起来还是方程(4.3)有解的必要条件. 因为由 Gauss-Bonnet 公式, 若 $K\neq 0$, 则 K 必变号. 此外, 若 v 是(4.3)的非常数解, 则

$$2\int Ke^{2w}=\int h=-\int e^{-v}\Delta v=-\int e^{-v}|\nabla v|^2<0.$$

§5 等量面上 Hamilton 系统的周期轨道

设 H 是 $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的 C^1 函数. 下列方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=-H_p(x,p),\\ \dot{p}=H_x(x,p)\end{cases} \tag{5.1}$$

$(x,p)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, 称为 Hamilton 方程组, $H(x,p)$ 称为是 Hamilton 函数. 有时引入记号

$$z=(x,p),$$

以及

$$J=\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix},$$

其中 I 是 $n\times n$ 单位矩阵. (5.1)可以简写为

$$-J\dot{z}=H'(z),$$

或者

$$\dot{z}=JH'(z). \tag{5.2}$$

Jgrad 有时又称为辛梯度.

对 Hamilton 方程组经常研究两种类型的周期解问题:

(I) 给定周期 T, 求解 z 满足(5.2)与周期条件 $z(t)=z(t+T)$.

(II) 给定能量, 例如是实数 C, 求满足(5.2)的周期解 $z(t)$, 使它位于给定的能量面上, 即 $H(z(t))=C$.

所以能够提这第 II 类问题, 是由于 Hamilton 方程组是保守系统:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(z(t))&=(H'(z(t)),\dot{z}(t))\\ &=(H'(z(t)),JH'(z(t)))=0,\end{aligned} \tag{5.3}$$

即沿轨道 $t\mapsto z(t)$, 能量——Hamilton 函数是守恒的.

有一件事对于求解这个问题是特别值得注意的: 在 $\Sigma=H^{-1}(c)$ 上的周期轨道 $z(t)$ 实际上与函数 $H(z)$ 在 Σ 外的行为无关! 即有下列

引理 5.1 设 H, $H_1\in C^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^1)$, $c\in\mathbb{R}^1$, $\Sigma=H^{-1}(c)$ 是紧的；又设 $H|_\Sigma=H_1|_\Sigma$, 以及

$$H'|_\Sigma\neq\theta,\ H_1'|_\Sigma\neq\theta,$$

则

$$\dot{z}=JH'(z)$$

与

$$\dot{z}=JH_1'(z) \tag{5.4}$$

在 Σ 上有相同的周期轨道.

证明 由假设，$\exists\mu\in C(\Sigma, \mathbb{R}^1)$ 适合

$$H'(z)=\mu(z)H_1'(z),\ \forall z\in\Sigma.$$

又因为 $\mu(z)\neq 0$, 而 Σ 是紧的，所以有常数 m, $M>0$,

$$m\leqslant\mu(z)\leqslant M,\quad \forall z\in\Sigma. \tag{5.5}$$

设 $z(t)$ 是 H 在 Σ 上的积分曲线，定义

$$z_1(t)=z\circ s(t),$$

其中 $s:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 是按下列方式确定的，先解方程：

$$\begin{cases}\dot{\sigma}(t)=\dfrac{1}{(\mu\circ z)(\sigma(t))},\\ \sigma(0)=0.\end{cases} \tag{5.6}$$

由于(5.5) 以及(5.6)的右端是有界连续函数，所以方程 (5.6) 在 $\mathbb{R}^1$ 的任意开区间上有解. 这解不一定唯一. 然而因为 $\sigma(t)\to+\infty$ 当 $t\to+\infty$. 设 $z(t)$ 有周期 T, 便一定存在 $\tau>0$ 使得 $\sigma(\tau)=T$. 令

$$s(t)=\left[\frac{t}{\tau}\right]T+\sigma\left(t-\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right),$$

其中[ ]表整数部分，则 $s\in C^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $s(0)=0$.

在这里，只有 $t=j\tau$, $j=0$, ±1, ±2, $\cdots$ 处的可微性是要检查的. 更确切地说，只要在 $t=\tau$ 处验证 s 可微. 事实上，因为

$$\dot{\sigma}(0)=\frac{1}{(\mu\circ z)(\sigma(0))}=\frac{1}{(\mu\circ z)(0)}=\frac{1}{(\mu\circ z)(T)}=\dot{\sigma}(\tau),$$

于是，$s:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 是一个微分同胚，并满足：

$$\begin{cases} \dot{s}(t)=\dfrac{1}{(\mu\circ z)(s(t))}, \\ s(0)=0, \end{cases}$$

则有
$$\dot{z}_1=\dot{s}(\dot{z}\circ s)=JH_1'(z_1),$$

以及 $z_1(0)=z(0)\in\Sigma$，所以 z_1 是 H_1 在 Σ 上的一条积分曲线. 同理证明反过来的结论.

这样一来，在 Σ 上的每个(5.2)的周期解都可以由(5.4)的周期解得到. 根据这个引理我们可以针对能量面 Σ，修改函数 H，使之仍以 Σ 为等量面，但却具有便于处理的形式. 例如说，当

$$\Sigma=H^{-1}(c)\text{是一个闭的严格凸曲面}$$

时，可以借助下列引理修改 Hamilton 函数.

引理 5.2 设 $H\in C^1(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^1)$，并且 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^{2n}\mid H(x)\leqslant c\}$ 是一个包含 θ 的一个开邻域的严格紧凸集，并且 $H'|_\Sigma\neq\theta$，$\Sigma=\partial\Omega$；则存在 $a\in C^1(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^1)$ 适合

(1) $a(\lambda z)=\lambda^2 a(z)>0\quad\forall\lambda>0,\ z\in\mathbb{R}^{2n}\backslash\theta$，

(2) $a(z)$ 是严格凸的，$a(\theta)=0$，

(3) $a^{-1}(1)=\Sigma$.

证明 取 $p(z)$ 为 Ω 的 Minkowski 泛函：$\inf\{\lambda>0\mid z/\lambda\in\Omega\}$，并令 $a(z)=p(z)^2$. 容易验证(1)～(3)都被满足. 至于 $a\in C^1$，是因为 $H'(z)\cdot z>H(z)-H(\theta)>0$，$\forall z\in\Sigma$. 于是应用隐函数定理，不难证明 $\psi: z\mapsto\dfrac{z}{|z|}$ 是 $\Sigma\to S_1^{2n-1}$ 的微分同胚 而

$$a(z)=|z|^2\Big/\left|\psi^{-1}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right|^2$$

是连续可微的.

定理 5.1 设 $\Sigma=H^{-1}(c)$ 是一个包含 θ 为内点的严格紧凸集的边界. 又设 $H'|_\Sigma\neq\theta$；则存在 $T>0$ 使得(5.2)在 Σ 上有以 T 为周期的解.

证明 1° 考察 H_1 的共轭函数 G，由第一章§6，G 也是 C^1 严格凸函数，并且

$$z=G'(w)\Leftrightarrow w=H_1'(z), \tag{5.7}$$

于是为求解：

$$\dot{z}=JH_1'(z),$$

转向考察下列约束泛函的极小问题

$$\begin{cases} J(w)=\int_0^{2\pi} G(-J\dot{w})\mathrm{d}t & w\in H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n}) \\ g(w)=\langle w, J\dot{w}\rangle=-\pi \end{cases} \tag{5.8}$$

因为 $\langle \mathrm{d}g(w), v\rangle=2\langle J\dot{w}, v\rangle$，所以在 $g^{-1}(-\pi)$ 上，$\mathrm{d}g(w)\neq\theta$ 并且由第一章 §6.3，$g^{-1}(-\pi)\neq\emptyset$.

又，$$\langle \mathrm{d}J(w), v\rangle=-\int_0^{2\pi} G'(-J\dot{w})J\dot{v}\,\mathrm{d}t.$$

所以只要 w^* 是临界点，就有 Lagrange 乘子 λ 使得

$$G'(-J\dot{w}^*)=\lambda w^*$$

这里 $\lambda\neq0$，因若不然，由 (5.7) 得到 $-J\dot{w}^*=H_1'(\theta)=\theta$，这与 $w^*\in g^{-1}(-\pi)$矛盾．令 $z^*=\lambda w^*$，便得到

$$\dot{z}^*=\lambda JH_1'(z^*),$$

再令 $T=\lambda\cdot2\pi$，以及 $z(t)=z^*(\lambda t)$，即得(5.4)的 T 周期解．这个 z 还在 Σ 上．事实上由齐次性

$$\int_0^{2\pi} H_1(z(t))\mathrm{d}t=2\int_0^{2\pi} H_1'(z(t))\cdot z(t)\mathrm{d}t$$
$$=-2\langle J\dot{z}, z\rangle=2\pi,$$

从而 $z\in H_1^{-1}(1)=\Sigma$.

2° 现在来看极小问题(5.8).

由于 J 是非负凸函数，所以显然有下界．它又是 $H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ 上的连续泛函，从而由定理 1.2，它还是弱下半连续的．如今 $g(w)$ 也是弱连续的，这是因为：当 $w_n \xrightarrow{\text{弱}} w(H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n}))$ 时，$w_n\to w(L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n}))$强，从而 $\langle w_n, J\dot{w}_n\rangle\to\langle w, J\dot{w}\rangle$．再由于

$$m|z|^2\leqslant H_1(z)\leqslant M|z|^2,$$

其中 m, M 分别是 $a^2(z)$在单位球面上的极小值与极大值，所以由共轭函数的性质

$$\frac{1}{M}|w|^2\leqslant G(w)\leqslant\frac{1}{m}|w|^2,$$

推得
$$\int_0^{2\pi} G(-J\dot{w})\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} |\dot{w}|^2 \mathrm{d}t.$$

因为在 $g^{-1}(-\pi)$ 上，不能有常值函数，所以 $\left(\int_0^{2\pi} |\dot{w}|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$ 与 $H(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ 的模是等价的. 这就推出 J 限制在 $g^{-1}(-\pi)$ 上是强制的. 应用定理 1.1, 得到极小问题(5.8)的解.

注 5.1 利用同样方法, F. H. Clarke, I. Ekeland[CE1] 得到次二次凸 Hamilton 函数的 Hamilton 方程组的非平凡极小周期解的存在性. 正是

定理 5.2 设 $H \in C(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^1)$ 是一个凸函数, 满足 $H(\theta)=0$, $H(z)>0$, 当 $z \neq \theta$. 又设有正数 k, K, a 及 η, $K>k$ 使得

$$H(z) \leqslant \frac{1}{2} k|z|^2 + a, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2n},$$

$$H(z) \geqslant \frac{1}{2} K|z|^2, \text{ 当 } |z| < \eta,$$

则 $\forall T \in \left(\frac{2\pi}{K}, \frac{2\pi}{k}\right)$ 存在以 T 为极小周期的 H^1 向量值函数 $z(t)$ 及常数 $h>0$ 使得

$$-J\dot{z}(t) \in \partial H(z(t)), \text{ a. e.}$$
$$H(z(t)) = h, \ \forall t,$$
$$h \leqslant 2akT(2\pi - kT)^{-1}.$$

注 5.2 P. Rabinowitz[Ra 4] 用不同的方法证明了类似于定理 5.1 的结果. 其中 H 不必是凸的, 但需代之以假设: $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^{2n} \mid H(x)\leqslant c\}$ 是星形区域, 并且 $\psi: z \mapsto \frac{z}{|z|}$ 是 $\Sigma \to S_1^{2n-1}$ 的微分同胚.

评注与参考文献

§1 定理 1.1～1.3 参看关肇直、张恭庆、冯德兴[KCF 1]. 近似极小值点的存在性定理是 Ekeland 得到的, 见 [Ek 1]. Palais Smale 条件首见于 Palais Smale [PS 1]. Люстерник 定理的证明仿 Browder[Br 3].

§2 凸函数的材料取自 Ekeland Temam[ET 1], 以及 Brezis[Bre 1],

非光滑分析部分看 F. H. Clarke[ClF 1] 以及张恭庆 [Ch 4].

§ 3 例 1 取自Berger[Be 1], 例 2 及例 3 见Browder[Br 4], Lions[Lio 1]以及张恭庆[Ch1, 4]. Nehari 技巧起源于[Ne, 1], 但这里的例子是新的. 例 5 是参照 Willem[Wi 1]改写的.

§ 4 参看 Kazdan Warner[KW 1]与 M. Berger[Be 3].

§ 5 等量面上 Hamilton 系统的周期轨道存在性首见于 Rabinowitz[Ra 4], 他在更为一般的条件下——等量面是一个星形区域的边界——证明了定理 5.1. 这里采用的是 Clarke [ClF 2]的方法. 也可以用下一章的山路引理给出这个定理的证明, 见 Ambrosetti[Am 1].

第三章　极小极大原理

极小极大原理是确定泛函临界值的基本手段之一，它的依据是形变引理，即若函数在两个不同水平集之间没有临界点，那么在一定条件下，其中一个水平集便可以形变收缩到另一个去．泛函水平集之间的形变是通过与这泛函有关的向量场规定的流线来实现的，这些内容是§1的主要内容．在这一节，我们将构造伪梯度向量场．分析 Palais-Smale 条件所起的作用，然后建立起两个形变引理(定理1.2与1.6)．定理1.5是一个形式最一般的极小极大原理．通过对映射族类的分析，我们可以从这个一般的原理出发导出形形色色不同的极小极大定理，并看清它们之间的关系．

山路引理和它的各种推广是一类极小极大定理，也是极小极大原理的一种具体化，因为这种具体形式在应用中比较方便．近年来在微分方程的研究中起了很大的作用．在§2，我们统一地从环绕概念出发得出一连串定理(定理2.1, 2.2, 2.3, 2.3′, 2.4, 2.5)．其中最简单的形式，定理2.3，即是最为广泛使用的山路引理．最后，我们还将导出这个定理的一种对偶形式(定理2.6)．

§3和§4都是§2中抽象定理的具体应用．山路引理和更一般的环绕定理被应用于超线性椭圆型边值问题，共振问题，以及一类发展方程的周期解问题．通过这些应用，读者将会了解到临界点理论中的各种不同的几何形式是怎样与具体的分析问题联系起来的。

§1 伪梯度流与极小极大原理

设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间, $\mathbf{f}$: $\mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$ 是一个 C^1 函数. 下述概念与第一章§3中的陈述是一致的: $x_0\in\mathscr{X}$ 称为是临界点, 是指:

$$\mathbf{f}'(x_0)=\theta.$$

记 $K=\{x\in\mathscr{X}\,|\,\mathbf{f}'(x)=\theta\}$称为临界集. $c\in\mathbb{R}^1$ 称为临界值, 是指 $\mathbf{f}^{-1}(c)\cap K\neq\emptyset$. 不是临界值的实数称为正则值. $\widetilde{\mathscr{X}}=\mathscr{X}\backslash K$, $\widetilde{\mathscr{X}}$ 中的点称为正则点. 记 $K_c=\{x\in K\,|\,\mathbf{f}(x)=c\}$, $\mathbf{f}_c=\{x\in\mathscr{X}\,|\,\mathbf{f}(x)\leqslant c\}$, 后者称为水平集.

函数 $\mathbf{f}$ 若有极小或极大, 对应的极值点当然是临界点, 然而我们关心一般的临界点. 所用的判定临界点存在的主要方法是考察 $\mathbf{f}_a$, $a\in\mathbb{R}^1$, 随 a 变化时, 其拓扑结构的变化. 而空间的拓扑结构是通过同胚关系, 或者同伦等价关系来区分的.

设 E 是一个拓扑空间. 两个连续映射 ϕ_0, ϕ_1: $E\to E$ 称为是同伦的, 是指存在连续映射 τ: $[0,1]\times E\to E$, 使得 $\tau(0,\cdot)=\phi_0$, $\tau(1,\cdot)=\phi_1$. 记作 $\phi_0\sim\phi_0$, 两个拓扑空间 E, F 称为是同伦等价的, 是指存在连续的 ϕ: $E\to F$, 以及连续的 ψ: $F\to E$, 使得 $\phi\circ\psi\sim id_F$, $\psi\circ\phi\sim id_E$.

1.1 伪梯度向量场

为了建立水平集之间的联系, 我们考察 $\mathbf{f}$ 的下降流线. 当 $\mathscr{X}$ 是 Hilbert 空间时, 很自然地, 可以利用负梯度向量 $-\mathbf{f}'(x)$ 来产生下降流:

$$\dot{x}(t)=-\mathbf{f}'(x(t)).$$

但这样做, 一则要较多的光滑性, 例如 $\mathbf{f}\in C^{2-0}$, 才能保证流的局部存在性; 二则不能直接推广到 Banach 空间上去 (因为 $\mathbf{f}'(x)\in\mathscr{X}^*$!). 为此 Palais 引进了

定义 1.1 伪梯度向量场(pseudo-gradient vector field). 称 $V:\widetilde{\mathscr{X}}\xrightarrow{C^{1-0}}\mathscr{X}$ 是 $\mathbf{f}$ 的一个伪梯度向量场, 如果

(1) $\|V(x)\|_{\mathscr{X}}\leqslant 2\|\mathbf{f}'(x)\|_{\mathscr{X}^*}$,

(2) $\langle\mathbf{f}'(x), V(x)\rangle\geqslant\|\mathbf{f}'(x)\|^2_{\mathscr{X}^*}$.

其中$\langle\ ,\ \rangle$是 $\mathscr{X}^*$ 与 $\mathscr{X}$ 的对偶.

定理 1.1(Palais) 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$, 则存在着 $\mathbf{f}$ 的一个伪梯度向量场.

证明 1° $\forall x_0\in\widetilde{\mathscr{X}}$, 由 $\mathbf{f}'(x_0)\neq\theta$, 有 $w\in\mathscr{X}$, $\|w\|=1$ 使得:

$$\langle\mathbf{f}'(x_0), w\rangle>\frac{2}{3}\|\mathbf{f}'(x_0)\|.$$

令

$$v=\frac{3}{2}\|\mathbf{f}'(x_0)\|w,$$

则

$$\begin{cases}\|v\|<2\|\mathbf{f}'(x_0)\|,\\ \langle\mathbf{f}'(x_0), v\rangle>\|\mathbf{f}'(x_0)\|^2.\end{cases}$$

由设 $\mathbf{f}'$ 连续, 所以有 x_0 的邻域 U_{x_0}, 使得

$$\begin{cases}\|v\|<2\|\mathbf{f}'(x)\|,\\ \langle\mathbf{f}'(x), v\rangle>\|\mathbf{f}'(x)\|^2,\end{cases}\quad 当\ x\in U_{x_0}\tag{1.1}$$

2° 因为 $\widetilde{\mathscr{X}}$ 是仿紧空间, 而$\{U_{x_0}|x_0\in\widetilde{\mathscr{X}}\}$是 $\widetilde{\mathscr{X}}$ 的一个开覆盖, 所以有一个局部有穷加细覆盖$\{U_{x_\alpha}|\alpha\in\Lambda\}$, Λ 是一个指标集. 令

$$\rho_\alpha(x)=\operatorname{dist}(x, \complement(U_{x_\alpha}))\quad \alpha\in\Lambda,$$

则 $\rho_\alpha\in C^{1-0}(\widetilde{\mathscr{X}}, \mathbb{R}^1)$. 再令

$$\beta_\alpha(x)=\frac{\rho_\alpha(x)}{\sum\limits_{\alpha'\in\Lambda}\rho_{\alpha'}(x)},\quad \alpha\in\Lambda,$$

因为 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}U_{x_\alpha}$ 构成 $\widetilde{\mathscr{X}}$ 的一个局部有穷覆盖. 所以分母中的级数 $\sum\limits_{\alpha'\in\Lambda}\rho_{\alpha'}(x)>0$ 并是有穷和. 令

$$v(x)=\sum_{\alpha\in\Lambda}\beta_\alpha(x)\cdot v_\alpha,$$

其中 v_α 是在点 x_α 处, 按第 1° 段定义的, 满足(1.1)的向量.

3° 容易验证:

$$\|v(x)\| \leqslant \sum_{\alpha\in\Lambda}\beta_\alpha(x)\|v_\alpha\| \leqslant 2\|\mathbf{f}'(x)\|,$$

$$\langle \mathbf{f}'(x),\ v(x)\rangle = \sum_{\alpha\in\Lambda}\langle \mathbf{f}'(x),\ v_\alpha\rangle\beta_\alpha(x)$$

$$\geqslant \|\mathbf{f}'(x)\|^2.$$

显然这样定义的伪梯度向量场不止一个.

1.2 伪梯度流与形变引理

利用一个伪梯度向量场可以产生 $\mathbf{f}$ 的一个下降流，即求解：

$$\dot{X}(t) = -V(X(t)). \tag{1.2}$$

这是因为，$\forall x_0\in\widetilde{\mathscr{X}}$，初值问题

$$\begin{cases}\dot{\sigma}(t) = -V(\sigma(t)),\\ \sigma(0) = x_0\end{cases} \tag{1.3}$$

的局部解总是唯一存在的，并且沿流线 $\sigma(t)$，函数 $t\to\mathbf{f}(\sigma(t))$ 是下降的：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{f}(\sigma(t)) &= \langle \mathbf{f}'(\sigma(t)),\ \dot{\sigma}(t)\rangle\\ &= -\langle \mathbf{f}'(\sigma(t)),\ V(\sigma(t))\rangle\\ &\leqslant -\|\mathbf{f}'(\sigma(t))\|^2.\end{aligned} \tag{1.4}$$

我们的目的是考察 $\mathbf{f}_a$，$a\in\mathbb{R}^1$，随 a 的变化. 特别是要想证明：当 $\mathbf{f}^{-1}[a,\ b]\cap K=\emptyset$ 时，即当在 a，b 之间没有 $\mathbf{f}$ 的临界值时，拓扑空间 $\mathbf{f}_b$ 与 $\mathbf{f}_a$ 是同伦等价的. 确切地说，$\mathbf{f}_a$ 是 $\mathbf{f}_b$ 的一个形变收缩核.

定义 1.2 设 $E\subset F$ 是两个拓扑空间，E 是 F 的一个子空间，称连续的 r: $F\to E$ 是一个形变收缩，如果

$$r\circ i = id_E,$$

$$i\circ r \sim id_F,$$

其中 i: $E\to F$ 是内射，而 id 表示恒同映射.

如果 $E\subset F$ 间存在一个形变收缩 r，那么就称 E 是 F 的一个形变收缩核(deformation retract).

如果还存在 τ: $[0,\ 1]\times F\to F$ 连续，满足：$\tau(0,\ \cdot)=id_F$，

$\tau(1, \cdot)=i\circ r$ 以及 $\tau(t, \cdot)|_E=id_E$, $\forall t\in[0, 1]$; 则称 r 为一个强收缩形变.

我们想利用(1.2)产生的下降流 $x(t)$ 把 $\mathbf{f}_b$ 收缩到 $\mathbf{f}_a$ 上去. 困难之处首先在于(1.3)的解只是局部的. 如果 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]$是一个紧空间, 利用紧性, 可以把这些局部流拼成整体的, 从而实现这种形变收缩. 但要求 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]$是紧的, 在应用中有时是过强了. 为了得到流的整体性, 我们还要用到第二章 §1 中引进的 Palais Smale 条件. 即

$$(\text{P. S.})\left.\begin{array}{l}\mathbf{f}(x_n)\text{有界}\\ \mathbf{f}'(x_n)\to\theta\end{array}\right\}\Rightarrow\{x_n\}\text{有强敛子列}. \tag{1.5}$$

对于满足 P. S. 条件的函数 $\mathbf{f}$, 有

性质 1.1 若 $\mathbf{f}$ 满足 P. S. 条件, 则 $\forall a, b\in\mathbb{R}^1, a<b$, 只要 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]\cap K=\emptyset$, 就有 $\varepsilon_0, \delta_0>0$, 使得

$$\|\mathbf{f}'(x)\|\geqslant\varepsilon_0,\quad\forall x\in\mathbf{f}^{-1}[a-\delta_0, b+\delta_0].$$

证明 倘若不然, $\exists x_n\in\mathbf{f}^{-1}\left[a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}\right]$, $n=1, 2, \cdots$, 使得 $\mathbf{f}'(x_n)\to 0$ 当 $n\to\infty$. 由 P. S. 条件, 在$\{x_n\}$中有子列 $x_{n_i}\to x^*$, 则必有 $\mathbf{f}'(x^*)=\theta$ 以及 $x^*\in\mathbf{f}^{-1}[a, b]$ 这便与 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]\cap K=\emptyset$ 矛盾.

性质 1.2 若 $\mathbf{f}$ 满足 P. S. 条件, 则 $\forall c\in\mathbb{R}^1$, K_c是紧集.

证明 设 $\{x_n\}_1^\infty\subset K_c$, 则 $\mathbf{f}(x_n)=c$, $\mathbf{f}'(x_n)=\theta$. 由 P. S. 条件, 有收敛子列 $x_{n_i}\to x^*$. 显然 $x^*\in K_c$, 于是 K_c 是紧的.

利用性质 1.1, 结合伪梯度向量场的定义, 可见当 $\mathbf{f}$ 满足 P. S. 条件, 且 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]\cap K=\emptyset$ 时, 可以用向量场

$$\frac{V(x)}{\|V(x)\|^2}\quad(\|V(x)\|^2\geqslant\|\mathbf{f}'(x)\|^2\geqslant\varepsilon_0^2)$$

代替向量场 $V(x)$. 有

引理 1.1 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$满足 P. S. 条件, 并且$\mathbf{f}^{-1}[a, b]\cap K=\emptyset$; 则 $\forall x_0\in\mathbf{f}^{-1}[a, b]$, 方程

$$\begin{cases}\dot{\sigma}(t)=\dfrac{-V(\sigma(t))}{\|V(\sigma(t))\|^2},\\ \sigma(0)=x_0\end{cases}\tag{1.6}$$

在 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]$ 有极大半解区间 $[0, T_{x_0})$，其中 T_{x_0} 是有穷数，并且满足：$\mathbf{f}(\sigma(T_{x_0}-0))=a$.

证明 由第一章§1.4，(1.6)有极大半解区间. 由于 $\forall t\in[0, T_{x_0})$，倘若 $\mathbf{f}(\sigma(T_{x_0}-0))>a$，则由性质1.1，

$$\mathbf{f}(\sigma(t))-\mathbf{f}(x_0)=-\int_0^t\langle\mathbf{f}'(\sigma(\tau)), \dot{\sigma}(\tau)\rangle d\tau<-t,$$

可见 T_{x_0} 必是有穷数. 注意到

$$\left\|\int_t^{t'}\dot{\sigma}(\tau)d\tau\right\|\leqslant\int_t^{t'}\frac{1}{\|V(\sigma(t)\|}d\tau\leqslant\frac{1}{\varepsilon_0}|t'-t|,$$

所以当 $t\to T_{x_0}-0$ 时，$\sigma(t)$ 有极限存在，记作 σ_0. 当然还有 $\mathbf{f}(\sigma_0)>a$. 再应用性质1.1，这个流 $\sigma(t)$ 还可以继续延伸，从而与 T_{x_0} 的极大性矛盾.

从这个引理推出：$\forall x_0\in\mathbf{f}^{-1}[a, b]$，存在唯一的实数 $r_{x_0}\geqslant 0$ 适合

$$\mathbf{f}(\sigma(r_{x_0}))=a.$$

我们把它称为到达时间.

引理 1.2 到达时间函数 $x\to r_x$: $\mathbf{f}^{-1}[a, b]\to\mathbb{R}^1$ 是连续的.

证明 为明确起见，把引理1.1中的解 $\sigma(t)$ 写成 $\sigma(t, x_0)$ 以强调流依赖于初值；那么 $t=r_{x_0}$ 便是方程

$$\mathbf{f}(\sigma(t, x_0))=a$$

的解. 由于

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{f}(\sigma(t, x_0))\Big|_{t=r_{x_0}}\\ &\quad=\langle\mathbf{f}'(\sigma(r_{x_0}, x_0)), \dot{\sigma}(r_{x_0}, x_0)\rangle<-1,\end{aligned}$$

由隐函数定理，解 $t=r_{x_0}$ 对 x_0 连续依赖.

定理 1.2 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$，满足P.S.条件，又设 $a, b\in\mathbb{R}_1$ 使得 $K\cap\mathbf{f}^{-1}[a, b]=\emptyset$，则 $\mathbf{f}_a$ 是 $\mathbf{f}_b$ 的一个强形变收缩核.

证明 1° 用 $\sigma(t, x_0)$ 表示(3.5)的解. 并令

$$\eta(t, x_0)=\begin{cases}x_0, & \text{当 } x_0\in \mathbf{f}_a,\\ \sigma(r_{x_0}t, x_0), & \text{当 } x_0\in \mathbf{f}_b\backslash \mathbf{f}_a.\end{cases}$$

则 η: $[0, 1]\times \mathbf{f}_b\to \mathbf{f}_b$, 显然满足:

$$\left.\begin{array}{l}\eta(0, x)=x,\\ \eta(1, x)\in \mathbf{f}_a,\end{array}\right. \quad \forall x\in \mathbf{f}_b,$$

$$\eta(t, x)=x, \quad \forall (t, x)\in [0, 1]\times \mathbf{f}_a.$$

如能再证 η 是连续的, 则取 $r=\eta(1, \cdot)$, r 就是一个形变收缩; 从而 $\mathbf{f}_a$ 是 $\mathbf{f}_b$ 的(强)形变收缩核.

2° 证 η 连续.

在 $[0, 1]\times \mathring{\mathbf{f}}_a$ 内的连续性是显然的.

在 $[0, 1]\times (\mathbf{f}_b\backslash \mathbf{f}_a)$ 的连续性, 由常微分方程解对初值的连续依赖性, 以及 $\mathbf{f}$ 的连续性推出.

只需证在 $(t, x)\in [0, 1]\times \mathbf{f}^{-1}(a)$ 上的连续性, 即

$\forall \varepsilon>0$, 要证存在 $\delta>0$, 当 $\|x-y\|<\delta$ 时, $\|x-\eta(t, y)\|<\varepsilon$ $\forall t\in [0, 1]$, 其中 $\mathbf{f}(x)=a$.

若 $y\in \mathbf{f}_a$, 取 $\delta=\varepsilon$ 即可.

若 $y\notin \mathbf{f}_a$, 则

$$\begin{aligned}\|\eta(t, y)-x\| &= \|\sigma(r_y t, y)-x\|\\ &\leqslant \|x-y\|+\int_0^{r_y t}\|\dot{\sigma}(s, y)\|ds\\ &\leqslant \delta+\frac{1}{\varepsilon_0}r_y=\delta+\frac{1}{\varepsilon_0}(r_y-r_x).\end{aligned}$$

由 r_x 的连续性, $\exists \delta_0>0$, 当 $\|y-x\|<\delta_0$ 时,

$$r_y<r_x+\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta_0\right\}$, 即得

$$\|\eta(t, y)-x\|<\varepsilon, \quad \text{当 } \|x-y\|<\delta.$$

定理 1.3 在定理 1.2 的假设下, $\forall c\in (a, b)$, 存在 η: $[0, 1]\times \mathscr{X}\to \mathscr{X}$ 连续, 满足:

$$\eta(0, \cdot)=id_{\mathscr{X}}, \tag{1.7}$$

$$\eta(t, \cdot)|\mathbf{f}_a = id\mathbf{f}_a, \tag{1.8}$$

$$\eta(1, \mathbf{f}_c) \subset \mathbf{f}_a, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{f}(\eta(t, x)) \leqslant \mathbf{f}(x), \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathscr{X} \tag{1.10}$$

证明 $\forall x \in \mathbf{f}^{-1}[a, b]$，用 γ_x 表示 $\sigma(t, x)$ 到达 $\mathbf{f}^{-1}(a)$ 的时间，$-\beta_x$ 表示到达 $\mathbf{f}^{-1}(b)$ 的时间，令 $n_x = \beta_x + \gamma_x$；则

$$\eta(t, x) = \begin{cases} x, & x \notin \mathbf{f}^{-1}[a, b], \\ \sigma\left(\dfrac{n-l}{l}\beta_x t, x\right), & x \in \mathbf{f}^{-1}[c, b], \\ \sigma(\gamma_x t, x), & x \in \mathbf{f}^{-1}[a, c), \end{cases}$$

其中 l 表示 $\sigma(t, x)$ 到达 $\mathbf{f}^{-1}(c)$ 的时间与 β_x 之和，就是所要求的.

定理 1.4 在定理 1.2 的假设下，$\forall [c, d] \subset (a, b)$，存在同胚映射 η：$\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 满足：

$$\eta|_{C\mathbf{f}^{-1}[a, b]} = id|_{C\mathbf{f}^{-1}[a, b]}, \tag{1.11}$$

$$\eta \text{：} \mathbf{f}_d \to \mathbf{f}_c \text{ 是同胚；} \tag{1.12}$$

$$\mathbf{f}(\eta(x)) \leqslant \mathbf{f}(x), \quad \forall x \in \mathscr{X}. \tag{1.13}$$

证明 $\forall x \in \mathbf{f}^{-1}[a, b]$，用 $-\alpha_x$，δ_x 分别表示 $\sigma(t, x)$ 到达 $\mathbf{f}^{-1}(d)$，$\mathbf{f}^{-1}(c)$ 的时间. β_x，γ_x 的意义同定理 1.3. 令

$$l = \beta_x - \alpha_x, \quad m = \beta_x + \delta_x, \quad n = \beta_x + \gamma_x.$$

并令

$$\eta(x) = \begin{cases} x, & x \notin \mathbf{f}^{-1}[a, b], \\ \sigma\left(\dfrac{m-l}{l}\beta_x, x\right), & x \in \mathbf{f}^{-1}[d, b], \\ \sigma\left(\dfrac{n-m}{n-l}(\beta_x - l) + m - \beta_x, x\right), & x \in \mathbf{f}^{-1}[a, d]. \end{cases}$$

容易验证 η 满足(1.11)，(1.13)并且是同胚. 为证(1.12)，注意到，若记 $\hat{x} = \sigma(-\beta_x, x)$，则

$$\begin{aligned}&\mathbf{f}\left(\sigma\left(\frac{n-m}{n-l}(\beta_x-l)+m-\beta_x,\ x\right)\right)\\&=\mathbf{f}\left(\sigma\left(\frac{n-m}{n-l}(\beta_x-l)+m,\ \hat{x}\right)\right)\\&\leqslant\mathbf{f}(\sigma(m,\ \hat{x}))=c\end{aligned}$$

当 $\beta_x\geqslant l$, 即

$$x\in\mathbf{f}^{-1}[a,\ d],$$

即得 η: $\mathbf{f}_d\to\mathbf{f}_c$ 连续. 又若将 m 与 l 对换, 即得 η^{-1}(d 与 c 对换), 所以 η^{-1} 连续, 并且 $\mathbf{f}_c$ 与 $\mathbf{f}_d$ 同胚.

1.3 极小极大原理

从前两个定理, 我们引出下列

定义 1.3 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X},\ \mathbb{R}^1)$. 满足: $\mathbf{f}(K)$ 是闭集. 并且, $\forall a,\ b\in\mathbb{R}^1,\ a<b$, 如果 $K\cap\mathbf{f}^{-1}[a,\ b]=\emptyset$ 蕴含了

(1) $\forall c\in(a,\ b)$, $\exists\eta$: $[0,\ 1]\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 连续, 满足(1.7)～(1.10), 则称 $\mathbf{f}$ 具有强收缩性质;

(2) $\forall[c,d]\subset(a,\ b)$, $\exists$ 同胚 η: $\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 满足(1.11)～(1.13), 则称 $\mathbf{f}$ 具有形变性质.

引入一些映射族:

$$\Phi^c=\{\eta:\mathscr{X}\to\mathscr{X}\,|\,\text{连续}\},$$

$$\Phi^I=\{\eta\in\Phi^c\,|\,\eta\sim id\},$$

$$\Phi^r_a(\mathbf{f})=\{\eta\in\Phi^c\,|\,\eta|_{\mathbf{f}_a}=id|_{\mathbf{f}_a}\},$$

$$\Phi^h_{(a,b)}(\mathbf{f})=\{\eta\in\Phi^c\,|\,\exists[c,\ d]\subset(a,\ b)\text{使得 }\eta\text{ 满足 }(1.11)\sim(1.13)\text{是同胚}\},$$

$$\Phi^s_d(\mathbf{f})=\{\phi\in\Phi^c\,|\,\exists c>a>b,\exists\eta:[0,\ 1]\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}\text{ 连续满足}(1.7)\sim(1.10),\text{使得 }\phi=\eta(1,\cdot)\},$$

其中 $a,\ b,\ d$ 都是实数.

定义 1.4 设 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个子集族, Φ 是 $\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 的一个映射族; 称 $\mathscr{F}$ 关于 Φ 是不变的, 如果: $\forall F\in\mathscr{F},\ \forall\phi\in\Phi,\ \phi(F)\in\mathscr{F}$.

下列极小极大原理是判定临界值的一个重要手段.

定理 1.5(Minimax 原理) 设 $\mathbf{f}: \mathscr{X}\to\mathbb{R}^1$，具有强收缩性质(或形变性质)．$\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个子集族．令

$$c=\inf_{F\in\mathscr{F}}\sup_{x\in F}\mathbf{f}(x). \tag{1.14}$$

如果：(1) c 是一个有穷数，

(2) $\exists\varepsilon_0>0$ 使得 $\mathscr{F}$ 关于 $\Phi^s_{c-\varepsilon_0}(\mathbf{f})$ (或 $\Phi^h_{(c-\varepsilon_0,c+\varepsilon_0)}(\mathbf{f})$) 是不变的；

那么 c 必是 $\mathbf{f}$ 的一个临界值．

证明 倘若不然，$\exists\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 使得 $K\cap\mathbf{f}^{-1}[c-\varepsilon,c+\varepsilon]=\emptyset$．取 $F_0\in\mathscr{F}$，使得

$$\sup_{x\in F_0}\mathbf{f}(x)<c+\frac{\varepsilon}{2},\ \text{即}\ F_0\subset\mathbf{f}_{c+\frac{\varepsilon}{2}};$$

但因 $\mathbf{f}$ 具有强收缩性质(或形变性质)，所以有 $\eta: [0,1]\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}$，$\eta(0,\cdot)=id_{\mathscr{X}}$，$\eta(t,\cdot)|_{\mathbf{f}_{c-\varepsilon}}=id_{\mathbf{f}_{c-\varepsilon}}$，$\eta(t,\mathbf{f}_{c+\varepsilon/2})\subset\mathbf{f}_{c-\varepsilon}$，以及 $\mathbf{f}(\eta(t,x))\leqslant\mathbf{f}(x)$，从而 $\phi=\eta(1,\cdot)\in\Phi^s_{c-\varepsilon_0}(\mathbf{f})$ (或有同胚 $\eta: \mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 适合：$\eta|_{C\mathbf{f}^{-1}[c-\varepsilon,c+\varepsilon]}=id_{C\mathbf{f}^{-1}[c-\varepsilon,c+\varepsilon]}$，$\eta: \mathbf{f}_{c+\frac{\varepsilon}{2}}\to\mathbf{f}_{c-\varepsilon/2}$，$\mathbf{f}(\eta(x))\leqslant\mathbf{f}(x)$；从而 $\eta\in\Phi^h_{(c-\varepsilon_0,c+\varepsilon_0)}(\mathbf{f})$)．由假设(2)，$\phi(F_0)\in\mathscr{F}$ (或 $\eta(F_0)\in\mathscr{F}$)．这蕴含了

$$c\leqslant\sup_{x\in\phi(F_0)}\mathbf{f}(x)<c-\frac{\varepsilon}{2}$$

(或用 $\eta(F_0)$ 代 $\phi(F_0)$)．这便是一个矛盾．

前面引进的映射族之间有如下联系：

$$\Phi^s_a(\mathbf{f})\subset\Phi^r_a(\mathbf{f})\cap\Phi^l\subset\Phi^r_a(\mathbf{f})\subset\Phi^c, \tag{1.15}$$

$$\Phi^h_{(a,b)}(\mathbf{f})\subset\Phi^r_a(\mathbf{f})\subset\Phi^c. \tag{1.16}$$

注 1.1 注意到：若 Φ，Ψ 是两个映射族，适合 $\Phi\subset\Psi$．又若 $\mathscr{F}$ 是一个子集族；那么 $\mathscr{F}$ 关于 Ψ 不变蕴含了 $\mathscr{F}$ 关于 Φ 不变．联系到上面两个映射族序列(1.15)与(1.16)，我们实际上可以得到许许多多极小极大原理．换句话说，定理 1.5 中的子集族 $\mathscr{F}$ 只要关于 Φ^c，Φ^l，$\Phi^r_{c-\varepsilon_0}(\mathbf{f})$，$\Phi^h_{(c-\varepsilon_0,c+\varepsilon_0)}(\mathbf{f})$，$\Phi^s_{c-\varepsilon_0}(\mathbf{f})$ 中的任意一个是不变的，那么当 c 有穷时，(1.14)便是 $\mathbf{f}$ 的一个临界值．

推论 1.1 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$，$\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个子集族，c 定

又如(1.14)，则当 c 是有穷数，$\mathscr{F}$ 关于映射族 Φ^c, Φ^f, $\Phi^r_{c-\varepsilon_0}(\mathbf{f})$, $\Phi^h_{(c-\varepsilon_0,c+\varepsilon_0)}(\mathbf{f})$ 或 $\Phi^s_{c-\varepsilon_0}(\mathbf{f})$, $\varepsilon_0>0$, 中的任意一个是不变的，并且 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{f}^{-1}[c-\varepsilon_0, \infty)$ 上满足 P. S. 条件时；c 就是 $\mathbf{f}$ 的一个临界值.

比较第二章 § 1，推论 1.3，现在我们又得到它的一个证明：

推论 1.2 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$，满足 P. S. 条件，并且 $\mathscr{X}$ 有下界；则 $c=\inf\limits_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{f}(x)$ 是 $\mathbf{f}$ 的一个临界值.（取 $\mathscr{F}=\{\{x\}|x\in\mathscr{X}\}$.）

推论 1.3 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$，满足 P. S. 条件，并且 $\mathbf{f}$ 有上界；则 $c=\sup\limits_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{f}(x)$ 是 $\mathbf{f}$ 的一个临界值.（取 $\mathscr{F}=\{\mathscr{X}\}$.）

注 1.2 为了得到强收缩性质或形变性质，函数 $\mathbf{f}$ 满足 P. S. 条件是很关键的. 然而当用极小极大原理确定临界值 c 时，如果能事先估计出 c 的范围，那么 P. S. 条件只要在 c 的附近成立就够了. 例如说，已知 $c>0$，我们只要条件：

$$(\text{P. S.})^+ \quad \left.\begin{array}{c} 0<\alpha\leqslant\mathbf{f}(x_n)\leqslant\beta<+\infty \\ \mathbf{f}'(x_n)\to\theta \end{array}\right\}\Rightarrow\{x_n\}\text{有收敛子列}.$$

类似地定义$(\text{P. S.})^-$.

为减弱 P. S. 条件，Cerami [Ce 1]，Bartolo, Benci, Fortunato [BBF 1] 又提出下列条件：

(PS)′. 称 $\mathbf{f}$ 满足(P. S.)′条件，是指：

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} \text{若}\{x_n\}\text{与 }\mathbf{f}(x_n)\text{都有界} \\ \mathbf{f}'(x_n)\to\theta \end{array}\right\}\Rightarrow\{x_n\}\text{有收敛子列}.$$

(2) $\exists$ 常数 α, $R>0$ 使得 $\|\mathbf{f}'(x)\|\|x\|\geqslant\alpha$，当 $\|x\|>R$.

(PS)′ 条件可以取代(P. S.)条件，使定理 1.2 成立. 事实上，在(P. S.)′条件下，引理 1.1 还是成立的. 考察(1.6)方程的右端，则由条件(2)可见

$$\frac{1}{\|V(x)\|}\leqslant\frac{1}{\|\mathbf{f}'(x)\|}\leqslant\frac{1}{\alpha}\|x\|,\ \text{当}\|x\|>R.$$

由条件(1)联合性质 1.1 的证明，得到 $\varepsilon_0>0$ 使得

$$\frac{1}{\|V(x)\|}\leqslant\frac{1}{\varepsilon_0}\quad \text{当}\|x\|\leqslant R\text{ 且 }x\in\mathbf{f}^{-1}[a, b].$$

再用 Gronwall 不等式得到常数 M, $\beta>0$ 使得

$$\|\sigma(t)\| \leqslant Me^{\beta t}.$$

以下证明完全类似于引理1.1，只须注意到：极大半解区间$[0, T)$中的T还是有穷数；从而$\int_0^T \|\dot{\sigma}(t)\| dt < +\infty$. 由此便能推出

$$\lim_{T\to 0} \sigma(t, x_0) = \sigma_0$$

存在.

于是当用(P. S.)′代替P. S. 时，定理1.3，1.4以及推论1.1都仍然成立.

注1.3 还有一些变化形式的P. S. 条件，在具体问题中应用有时是便利的.

H. Brézis, J. M. Coron, L. Nirenberg [BCN]称满足下列条件的函数$\mathbf{f}$为$(P. S.)_c$函数：

$$\{x_n\} \subset \mathscr{X}, \ \mathbf{f}(x_n) \to c, \ \mathbf{f}'(x_n) \to \theta,$$
$$\Rightarrow c \text{ 是 } \mathbf{f} \text{ 的一个临界值.}$$

张恭庆考察当$\mathbf{f}: \mathscr{X} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^1$，限制在$\mathscr{X}$的一个稠密子集$Y$时，例如$Y \subset \mathscr{X}$本身是一个$B$空间，有较$\mathscr{X}$强的拓扑，$\mathbf{f}$在$\mathscr{X}$上满足P. S. 条件，但在$Y$上未必，在一定条件下，$\mathbf{f}$在$Y$上仍具有强收缩性质或形变性质. 参看[Ch2].

Struwe也有推广P. S. 条件的考虑[St2].

1.4 一个加强的形变引理

当$\mathbf{f}: \mathscr{X} \xrightarrow{C^{2-0}} \mathbb{R}^1$时，形变定理1.2还可以得到进一步的加强.

定理1.6 设$\mathbf{f}: \mathscr{X} \to \mathbb{R}^1$是$C^{2-0}$的函数，满足P. S. 条件. 又设在$\mathbf{f}^{-1}[a, b]$内，至多有一个临界值$c$，它对应着有穷个临界点；则$\mathbf{f}_a$是$\mathbf{f}_b$的一个强形变收缩核.

证明 1° $\forall x_0 \in \mathbf{f}_b \backslash \mathbf{f}_a$定义流如下：

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t, x_0) = \dfrac{-(\mathbf{f}(x_0) - c)V(\sigma(t, x_0))}{\langle \mathbf{f}'(\sigma(t, x_0)), V(\sigma(t, x_0))\rangle}, \\ \sigma(0, x_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.16}$$

其中$V(x)$是$\widetilde{\mathscr{X}}\to\mathscr{X}$的伪梯度向量场. 不难看出

$$\frac{d}{dt}\mathbf{f}(\sigma(t,x_0))=-(\mathbf{f}(x^0)-c).$$

从而
$$\mathbf{f}(\sigma(t,x_0))=(1-t)\mathbf{f}(x_0)+tc.$$

这便蕴含了$\sigma(t,x_0)$在$[0,1)\times(\mathbf{f}_b\backslash\mathbf{f}_c)$上有定义, 并且

$$\lim_{t\to1-0}\mathbf{f}(\sigma(t,x_0))=c.$$

如果c不是临界值, 这定理归结为定理1.3 以下设c是临界值.

然而, 当$t\to1-0$时, 对于那些使$\sigma(t,x_0)$接近临界点的初值x_0方程(1.16)右端的分母接近于0, 于是不能保证解延拓到$t=1$.

2° 然而我们将证极限$\lim\limits_{t\to1-0}\sigma(t,x_0)$存在. 设

$$K_c=K\cap\mathbf{f}^{-1}[a,b]=\{z_i\}_{i=1}^N,$$

则下列两种情形必有一种情况发生:

(a) $\inf\limits_{t\in[0,1)}\|\sigma(t,x_0)-z_i\|>0\quad\forall i=1,\cdots,N$,

(b) 对某个i,

$$\inf_{t\in[0,1)}\|\sigma(t,x_0)-z_i\|=0.$$

对于情形(a), 存在$d>0$使得

$$\inf_{t\in[0,1)}\|\mathbf{f}'(\sigma(t,x_0))\|\geqslant d;$$

于是

$$\begin{aligned}\|\sigma(t_2,x_0)-\sigma(t_1,x_0)\|&\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\|\dot\sigma(t,x_0)\|dt\\&\leqslant(\mathbf{f}(x_0)-c)\left|\int_{t_1}^{t_2}\frac{\|V(\sigma(t,x_0))\|}{\langle\mathbf{f}'(\sigma(t,x_0)),V(\sigma(t,x_0))\rangle}dt\right|\\&\leqslant\frac{2}{d}(\mathbf{f}(x_0)-c)|t_2-t_1|,\end{aligned}$$

这蕴含了极限$\lim\limits_{t\to1-0}\sigma(t,x_0)$存在.

对于情形(b), 将证$\lim\limits_{t\to1-0}\sigma(t,x_0)=z_i$. 因若不然, 必$\exists\varepsilon>0$使得有无穷多个不互交的闭区间$[t_j,t_{j'}]\subset[0,1)$, 使得$\sigma(t,x_0)\in$

$\bar{B}(z_i, 2\varepsilon)\backslash B(z_i, \varepsilon)$, 当 $t\in[t_j, t_{j^*}]$, $\|\sigma(t_j)-z_i\|=2\varepsilon$, $\|\sigma(t_{j^*})-z_i\|=\varepsilon$, $j=1, 2, \cdots$. 这个 $\varepsilon>0$ 可以选得小, 以致

$$\inf_{t\in[t_j,t_{j^*}]}\|\mathbf{f}'(\sigma(t, x_0))\|\geqslant d>0$$

于是便导致了矛盾:

$$\varepsilon\leqslant\|\sigma(t_{j^*}, x_0)-\sigma(t_j, x_0)\|\leqslant\int_{t_j}^{t_{j^*}}\|\dot{\sigma}(t, x_0)\|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{2}{d}(\mathbf{f}(x_0)-c)(t_{j^*}-t_j)\to 0.$$

3° 定义形变收缩如下:

$$\tau(t, x)=\begin{cases}\sigma(t, x), & (t, x)\in[0, 1)\times(\mathbf{f}_b\backslash\mathbf{f}_c),\\ \lim\limits_{t\to 1-0}\sigma(t, x), & (t, x)\in\{1\}\times(\mathbf{f}_b\backslash\mathbf{f}_c),\\ x, & (t, x)\in[0, 1]\times\mathbf{f}_c.\end{cases}$$

只须验证 τ: $[0, 1]\times\mathbf{f}_b\to\mathbf{f}_b$ 是连续的就够了. 为此分为四种情形:

(a) $(t, x)\in[0, 1]\times\mathbf{f}_c$,

(b) $(t, x)\in[0, 1)\times(\mathbf{f}_b\backslash\mathbf{f}_c)$,

(c) $(t, x)\in\{1\}\times(\mathbf{f}_b\backslash\mathbf{f}_c)$,

(d) $(t, x)\in[0, 1]\times\mathbf{f}^{-1}(c)$.

情况(a)是显然的. 情况(b)是常微分方程解对初值的连续依赖性.

对情况(c)的验证　设 $x^*=\lim\limits_{t\to 1-0}\sigma(t, x_0)$ 为临界点, 将证: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得 $\|x_0-y\|<\delta$, $1-\delta<t$ 蕴含了: $\|\tau(t,y)-x^*\|<\varepsilon$ (不妨设 $y\notin\mathbf{f}^{-1}(c)$).

适当选择 $\delta_1>0$ 以及 $\delta_2=\delta_2(\delta_1)>0$, $\delta_2<\frac{\varepsilon}{2}$ 使得

$$\|\sigma(1-\delta_1, y)-x^*\|<\varepsilon/2\quad 当\|y-x_0\|<\delta_2.$$

不妨设在 $\bar{B}(x^*, \varepsilon)\backslash B(x^*, \varepsilon/2)$ 上没有 $\mathbf{f}$ 的临界点. 于是

$$d^*\triangleq\inf_{x\in\bar{B}(x^*, \varepsilon)\backslash B\left(x^*, \frac{\varepsilon}{2}\right)}\|\mathbf{f}'(x)\|>0.$$

选定 $\delta_1>0$ 如此之小, 以致

$$(b-c)\delta_1 < \frac{1}{4}\varepsilon d^*,$$

于是将得到:

$$\|\tau(t, y) - x^*\| < \varepsilon,\ \forall (t, y) \in [1-\delta_1, 1) \times B(x_0, \delta_2).$$

因若不然,必有 $t' < t''$ 以及 $y_0 \in B(x_0, \delta_2)$ 使得

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \|\tau(t, y_0) - x^*\| \leqslant \varepsilon & \text{当 } t \in [t', t''] \subset [1-\delta_1, 1), \\ \|\tau(t', y_0) - x^*\| = \varepsilon/2, & \|\tau(t'', y_0) - x^*\| = \varepsilon, \end{cases}$$

这蕴含了

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &\leqslant \|\tau(t'', y_0) - \tau(t', y_0)\| \leqslant \int_{t'}^{t''} \|\dot{\sigma}(t, y_0)\| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{2}{d^*}(b-c)\delta_1 < \varepsilon/2, \end{aligned}$$

便导出矛盾.

对情况(d)的验证是类似的. 因为现在 $x^* = x_0$, 一开始就取 $y \in B(x_0, \varepsilon/2)$, 然后直接用情况(c)的后一段证明就够了. (其中最后一式中不是 $|t'-t''| \to 0$ 而是 $\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x) \to 0$.)

注 1.4 定理 1.3 表明当 $\mathbf{f}^{-1}[a, b] \cap K = \emptyset$ 时 (连同 P. S. 条件), $\mathbf{f}_b$ 与 $\mathbf{f}_a$ 同伦. 定理 1.6 则改进到(在较强的光滑性假设下), 当 $\mathbf{f}^{-1}(a, b] \cap K = \emptyset$ 时, $\mathbf{f}_b$ 仍与 $\mathbf{f}_a$ 同伦.

定理 1.4 连同性质 1.1 表明: 当 $\mathbf{f}^{-1}[a, b] \cap K = \emptyset$ 时(连同 P. S. 条件), $\mathbf{f}_b$ 与 $\mathbf{f}_a$ 同胚.

§2 环 绕

在上一节, 我们引进过一个极小极大原理 (定理 1.5), 它是判定临界值存在的一个基本原则. 在那个原理中, 从一个子集族 $\mathscr{F}$ 出发, 这个集族 $\mathscr{F}$ 对于依赖于函数 $\mathbf{f}$ 的某个映射族是不变的, 通过求极小极大的方法确定出临界值. 在本节中, 我们利用拓扑学中的环绕(link)概念, 介绍一种产生集族 $\mathscr{F}$ 的方法.

设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间, $Q \subset \mathscr{X}$ 是其中的一个有边的闭

Banach 流形，具有边界 ∂Q. 又设 S 是 $\mathscr{X}$ 中的一个闭子集.

定义 2.1 称 ∂Q 与 S 是环绕的，是指：

(1) $\partial Q \cap S = \emptyset$,

(2) 对任意连续的 $\phi: Q \to \mathscr{X}$, 满足 $\phi|_{\partial Q} = id_{\partial Q}$ 都有

$$\phi(Q) \cap S \neq \emptyset.$$

环绕概念的几何图象如图 3.1.

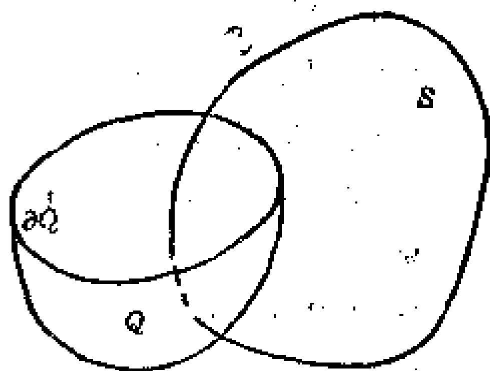


图 3.1

如果 $\mathbf{f}: \mathscr{X} \to \mathbb{R}^1$, 在 ∂Q 与 S 上的值是可以分离的，即有实数 $\beta > \alpha$, 使得

a) $$\sup_{x \in \partial Q} \mathbf{f}(x) \leqslant \alpha, \tag{2.1}$$

b) $$\inf_{x \in S} \mathbf{f}(x) \geqslant \beta, \tag{2.2}$$

那么便有下列

定理 2.1 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间，$\mathbf{f} \in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$ 满足 (2.1), (2.2) 并在 $\mathbf{f}^{-1}[\alpha, +\infty)$ 上满足 P. S. 条件. 如果还有 $\sup_{x \in Q} \mathbf{f}(x) < +\infty$; 那么 $\mathbf{f}$ 必有一个临界值 $c \geqslant \beta$.

证明 记 $\Gamma = \{\phi: Q \to \mathscr{F}$ 连续 $| \phi|_{\partial Q} = id_{\partial Q}\}$. 令

$$\mathscr{F} = \{\phi(Q) | \phi \in \Gamma\}.$$

定义
$$c = \inf_{F \in \mathscr{F}} \sup_{x \in F} \mathbf{f}(x),$$

则 c 便是所要的 $\mathbf{f}$ 的临界值. 事实上，按定理 1.5, 只须验证：

1° $-\infty < c < +\infty$,

2° $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \psi: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 连续，满足：$\psi|_{\mathbf{f}_{c-\varepsilon}} = id_{\mathbf{f}_{c-\varepsilon}}$ 都有

$$\psi(F) \in \mathscr{F}, \quad \forall F \in \mathscr{F}.$$

就够了.

对 1°, 因为 $id \in \Gamma$, 所以 $Q \in \mathscr{F}$, 由假设 $c \leqslant \sup_{x \in Q} \mathbf{f}(x) < +\infty$.

又由 (2.2) 及环绕性，

$$\sup_{x \in F} \mathbf{f}(x) \geqslant \inf_{x \in S} \mathbf{f}(x) \geqslant \beta, \quad \forall F \in \mathscr{F}$$

由此导出：c 有穷，并且 $c\geqslant\beta$.

为证 2°，取 $\varepsilon\in(0,\beta-\alpha)$，则由条件 (2.1) 有 $\partial Q\subset\mathbf{f}_{c-\varepsilon}$. 此外，$\forall\phi\in\Gamma$，显然 $\psi\circ\phi$: $Q\to\mathscr{X}$ 连续，并且 $\psi\circ\phi|_{\partial Q}=id_{\partial Q}$；所以 $\psi\circ\phi\in\Gamma$. 即得 $\psi(F)\in\mathscr{F}$, $\forall F\in\mathscr{F}$.

定理 2.1 还可以适当加强，把 $\mathbf{f}$ 在 ∂Q 与 S 上的值分离的条件减弱.

定理 2.2 设 $\mathbf{f}\in C^{2-0}(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$，满足 P.S. 条件；以及 $\exists\alpha$ 实数使得：

$$\sup_{x\in\partial Q}\mathbf{f}(x)\leqslant\alpha, \tag{2.1$'$}$$

$$\mathbf{f}(x)>\alpha,\quad \forall x\in S, \tag{2.2$'$}$$

$$\sup_{x\in Q}\mathbf{f}(x)<+\infty,$$

其中 S 与 ∂Q 是环绕的. 又设 $\mathbf{f}$ 的每个临界值只对应着有穷多个临界点；则 $\mathbf{f}$ 必有一个临界值 $c>\alpha$.

证明 由假设可以定义实数

$$c=\inf_{\phi\in\Gamma}\sup_{x\in Q}\mathbf{f}(\phi(x)),$$

其中 $\Gamma\doteq\{\phi\colon Q\to\mathscr{X}\text{ 连续 }|\phi|_{\partial Q}=id_{\partial Q}\}$，并且 $c\geqslant\alpha$. 倘若有 $c>\alpha$，那么利用定理 2.1 第 2 段的证明，取 $\varepsilon\in(0,c-\alpha)$，证明就完成了.

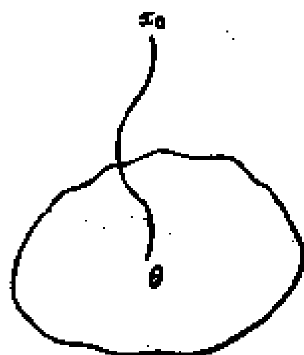


图 3.2

现在看 $c=\alpha$ 的情形. 不妨设有 $\varepsilon_0>0$，在 $(c,c+\varepsilon_0]$ 上没有 $\mathbf{f}$ 的临界值，因若不然，定理结论已成立. 取 $\phi\in\Gamma$，使得

$$\phi(Q)\subset\mathbf{f}_{c+\varepsilon_0},$$

按定理 1.6，有强形变收缩 η: $\mathbf{f}_{c+\varepsilon_0}\to\mathbf{f}_c=\mathbf{f}_\alpha$. 由(2.1)$'$，$\partial Q\subset\mathbf{f}_\alpha$，所以 $\eta\circ\phi\in\Gamma$. 由假设 ∂Q 与 S 环绕，又有 $\eta\circ\phi(Q)\cap S\neq\emptyset$，但 $\eta\circ\phi(Q)\subset\mathbf{f}_\alpha$，这便与 (2.2)$'$ 矛盾.

环绕的例子很多. 每个例子，按定理 2.1 与 2.2 导出相应的临界点定理.

例 1 设 Ω 是 $\mathscr{X}$ 中原点 θ 的一个开邻域，$S=\partial\Omega$，设 $x_0\notin\Omega$，

令

$$Q=\{\lambda x_0 \mid \lambda\in[0,1]\},$$

则 $\partial Q=\{\theta, x_0\}$. 由连通性, ∂Q 与 S 环绕(见图 3.2).

这种情形对应的极小极大原理, 称为山路引理(Mountain pass lemma). 陈述如下:

定理 2.3 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$, 在 $\mathbf{f}^{-1}(0, +\infty)$ 上满足 P.S. 条件; 又设 $\Omega\subset\mathscr{X}$ 是 θ 的一个开邻域, $x_0\notin\Omega$: 那么当

$$\mathbf{f}(x_0),\ \mathbf{f}(\theta)\leqslant 0,$$

$$\mathbf{f}|_{\partial\Omega}\geqslant\alpha>0$$

时, $c=\inf\limits_{h\in\Psi}\sup\limits_{t\in[0,1]}\mathbf{f}(h(t))$ 是 $\mathbf{f}$ 的一个正临界值, $c\geqslant\alpha$; 其中

$$\Psi=\{h\in C([0,1], \mathscr{X}) \mid h(0)=\theta,\ h(1)=x_0\}$$

例 2 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间, $\mathscr{X}_1$ 是它的一个有穷维线性子空间, $\mathscr{X}_2$ 是它的补空间:

$$\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\oplus\mathscr{X}_2.$$

令
$$S=\mathscr{X}_2,$$
$$Q=B_R\cap\mathscr{X}_1,$$

其中 B_R 是以 θ 为中心, $R>0$ 为半径的球; 则 $\partial Q=\{x\in\mathscr{X}_1 \mid \|x\|=R\}$.

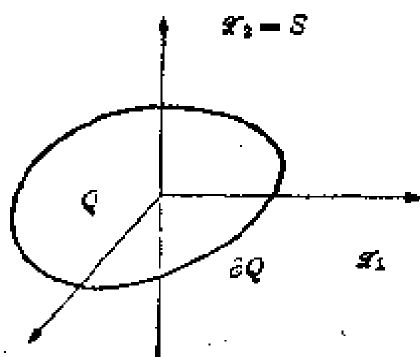


图 3.3

我们要证:

S 与 ∂Q 环绕. 显然有 $S\cap\partial Q=\emptyset$. 只要再证:

$$\left.\begin{array}{l}\psi: Q\to\mathscr{X} \text{ 连续}\\ \psi|_{\partial Q}=id|_{\partial Q}\end{array}\right\}\Rightarrow\psi(Q)\cap S\neq\emptyset,$$

即 $\exists u_0\in Q$ 使得: $P\psi(u_0)=\theta$, 其中 P 是 $\mathscr{X}\to\mathscr{X}_1$ 的投影算子. 为此作 $F: [0,1]\times Q\to\mathscr{X}_1$,

$$F(t, u)=tP\psi(u)+(1-t)u,$$

则因
$$F(t, \partial Q)=\partial Q\not\ni\theta,\quad \forall t\in[0,1],$$

所以
$$\deg(F_1, Q, \theta)=\deg(F_0, Q, \theta)=1,$$

其中 deg 是 $\mathscr{X}_1$ 上的 Brouwer 度, 从而 $\exists u_0\in Q$, 使得 $P\psi(u_0)=\theta$, 即得 S 与 ∂Q 环绕.

例 3 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间，$\mathscr{X}_1$ 是它的有穷维线性子空间，$\mathscr{X}_2$ 是 $\mathscr{X}_1$ 的补空间：

$$\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\oplus\mathscr{X}_2.$$

又设 $e\in\mathscr{X}_2$，$\|e\|=1$，设 $R_1, R_2, \rho>0$，令

$$S=\mathscr{X}_2\cap\partial B_\rho,$$

$$Q=\{u+te\,|\,u\in\mathscr{X}_1\cap B_{R_2},\ t\in[0, R_1]\},$$

其中 B_r 是以 θ 为中心，$r>0$ 为半径的球；则当 $R_1>\rho$ 时，S 与 ∂Q 环绕（见图 3.4）.

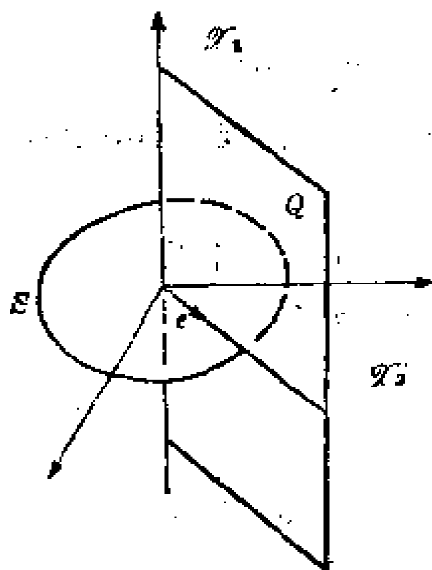


图 3.4

显然，$S\cap\partial Q=\emptyset$. 要证：

$$\begin{cases}\psi: Q\to\mathscr{X}\text{ 连续},\\ \psi|_{\partial Q}=id_{\partial Q}\end{cases}\Rightarrow\psi(Q)\cap S\neq\emptyset.$$

即 $\exists w_0\in Q$ 满足：

$$\begin{cases}P\psi(w_0)=\theta,\\ \|\psi(w_0)\|=\rho,\end{cases}\tag{2.3}$$

其中 $P:\mathscr{X}\to\mathscr{X}_1$ 是投影算子. 为此作形变

$$F: [0, 1]\times Q\to\mathscr{X}_1\times\mathbb{R}^1e$$

如下：

$$F(t, u+se)=[(1-t)u+tP\psi(u+se)]$$
$$+[(1-t)s+t\|(I-P)\psi(u+se)\|-\rho]e.$$

易见：当 $u+se\in\partial Q$ 时，

$$F(t, u+se)=u+(s-\rho)e\neq\theta,$$

而 $$F(1, u+se)=P\psi(u+se)+[\|(I-P)\psi(u+se)\|-\rho]e,$$

$$F(0, u+se)=u+(s-\rho)e.$$

要找的 w_0 满足(2.3)，相当于 $F(1, w_0)=\theta$.

如今

$$\deg(F(1,\cdot),Q,\theta)=\deg(F(0,\cdot),Q,\theta)$$
$$=\deg(id_{\mathscr{X}_1},\mathscr{X}_1\cap B_{R_1},\theta)\cdot\deg(s-\rho,(0,R_1),0)$$
$$=1\quad(\because\rho\in(0,R_1)).$$

所以 $\psi(Q)\cap S\neq\emptyset$，即 ∂Q 环绕 S.

注 2.1 例 1 的山路引理是 Ambrosetti, Rabinowitz[AR1] 提出来的. 这是最原始的环绕形式. 例 2 与例 3 的环绕形式可以在 Rabinowitz[Ra6]与 Benci, Rabinowitz[BR1]中找到. 文献中一直假定 $\mathscr{X}$ 是 Hilbert 空间.

注 2.2 倪维明[Ni1]用环绕数(linking number)来讨论环绕. 在很大程度上统一了前面的工作. 他特别在无穷维 Banach 流形上讨论了环绕数的概念.

在有穷维空间 $\mathbb{R}^n$ 上，设 Ω_1 是一个$(k+1)$维流形，例如说 B^{k+1}—$(k+1)$维单位球，有边界 $\partial\Omega_1$，而 Ω_2 是$(n-k-1)$维无边流形——例如 S^{n-k-1}. 设

$$\left.\begin{array}{l}\phi:\partial\Omega_1\to\mathbb{R}^n\\ \psi:\Omega_2\to\mathbb{R}^n\end{array}\right.\quad\text{连续};\ \phi(\partial\Omega_1)\cap\psi(\Omega_2)=\emptyset,\tag{2.4}$$

令 $Q=\phi(\Omega_1)$，$\partial Q=\phi(\partial\Omega_1)$，$S=\psi(\Omega_2)$.

为了描写 $Q\cap S\neq\emptyset$，它等价于说

$$\exists(x,y)\in\Omega_1\times\Omega_2\quad\text{使}\quad\phi(x)=\psi(y).$$

若令 $F:(x,y)\mapsto\phi(x)-\psi(y)$，$\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{R}^n$，则由(2.4)，

$$\theta\notin F(\partial(\Omega_1\times\Omega_2))=F(\partial\Omega_1\times\Omega_2),$$

所以 $\deg(F,\Omega_1\times\Omega_2,\theta)$有定义. 后者与 ϕ，ψ 的环绕数相差一个(-1)幂因子. 在这个意义上，为了判断 $Q\cap S\neq\emptyset$，只须看 $\deg(F,\Omega_1\times\Omega_2,\theta)\neq0$.

例 3 中的环绕事例，有一个变化的形式，也是在应用中有时遇到的.

设 $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\oplus\mathscr{X}_2$，$\dim\mathscr{X}_1<+\infty$，

$$S=\partial B_\rho\cap\mathscr{X}_2,$$
$$\partial Q=(B_R\cap\mathscr{X}_1)\cup(\partial B_R\cap(\mathscr{X}_1\oplus\mathbb{R}^1e))^+,\ R>\rho,$$

其中

$$(\partial B_R \cap (\mathscr{X}_1 \oplus \mathbb{R}^1 e))^+$$
$$= \{x_1 + te \mid (x_1, t) \in \mathscr{X}_1 \times \mathbb{R}^1_+, \ \|x_1\|^2 + t^2 = R^2\}$$

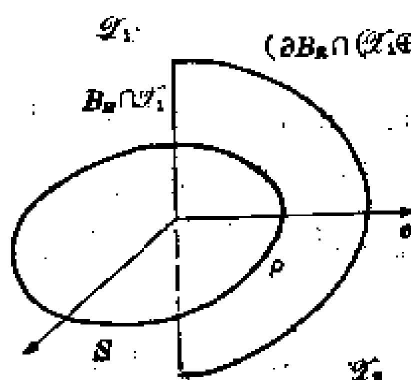


图 3.5

(见图3.5). 记 $S_r = \partial B_r$, 相应地有

定理 2.4(广义山路引理) 设 $f \in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$, 在 $f^{-1}(0, \infty)$ 上满足 P.S. 条件. 又设

$$f|_{B_\rho \cap \mathscr{X}_1} \geqslant \alpha > 0,$$
$$f|_{B_R \cap \mathscr{X}_1 \cup (\partial B_R \cap (\mathscr{X}_1 + \mathbb{R}^1 e))^+} \leqslant 0,$$

则
$$c = \inf_{\phi \in \Gamma} \sup_{x \in Q} f(\phi(x))$$

是 f 的一个正临界值, $c \geqslant \alpha$; 其中

$$Q = \{x_1 + te \mid (x_1, t) \in \mathscr{X}_1 \times \mathbb{R}^1_+, \ \|x_1\|^2 + t^2 \leqslant R^2\}.$$

例1~3所考察的环绕的实例都涉及流形 Q 是有穷维的. 自然也需要考察 Q 与 S 都是无穷维的情形. 但因无穷维流形有许多病态现象, 直接按定义 2.1 去判断两个集合 ∂Q 与 S 环绕是困难的. 为此作如下修改.

定义 2.2 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间, $\mathscr{X}_1$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个闭子空间, $\mathscr{X}_2 = \mathscr{X}_1^\perp$. 记

$$\Sigma = \{\phi \in C([0, 1] \times \mathscr{X}, \mathscr{X}) \mid P_2 \phi(t, u)\} = P_2 u - W_t u,$$

$\forall t \in [0, 1]$, W_t 都是紧映射, $\phi(0, u) = u\}$. P_2 表示到 $\mathscr{X}_2$ 上的正交投影.

设 S 与 Q 都是 Hilbert 流形, Q 有边界 ∂Q. 称 S 与 ∂Q 环绕, 如果 $\forall \phi \in \Sigma$, 满足

$$\phi(t, \partial Q) \cap S = \emptyset,$$

都有

$$\phi(t, Q) \cap S \neq \emptyset. \quad \forall t \in [0, 1].$$

作为例3的推广. 有

引理 2.1 设 $\mathscr{X} = \mathscr{X}_1 \oplus \mathscr{X}_2$, $e \in \partial B_1 \cap \mathscr{X}_1$, 又 $R_1 > \rho > 0$, $R_2 > 0$. 若令 $S = \partial B_\rho \cap \mathscr{X}_1$, $Q = \{re \mid r \in [0, R_1]\} \oplus (B_{R_2} \cap \mathscr{X}_2)$, 则 S 与 ∂Q 环绕.

证明 与例3相同.

相应的极小极大定理参看 Benci Rabinowitz[BR, 1].

集合 ∂Q 与 S 环绕与否并不依赖于给定的函数 $\mathbf{f}$，它的好处固然是在应用时可以不顾及具体函数，但若把函数 $\mathbf{f}$ 自身的值的分布情况也考虑在内，∂Q 与 S 环绕的限制却是可以放松的.

回顾一下定理 2.1 的证明，在那里临界值是通过取

$$\Gamma=\{\phi: Q\to\mathscr{X} \text{ 连续 } |\phi|_{\partial Q}=id_{\partial Q}\},$$

并令

$$c=\inf_{\phi\in\Gamma}\sup_{x\in Q}\mathbf{f}(\phi(x))$$

得到的.其实映射族 Γ 并不需要取得如此之大，只要能包含 id 以及 $\Phi^{s}_{c-\varepsilon}(\mathbf{f})$，$\varepsilon>0$ 就够了(这时取 $\mathscr{F}=\{\phi(Q)|\phi\in\Gamma\}$，则 $\mathscr{F}$ 包含 Q 本身，并且关于 $\Phi^{s}_{c-\varepsilon}(\mathbf{f})$ 不变). 因为在定理 2.1 的证明中只用到

$$S\cap\partial Q=\emptyset, \tag{2.5}$$

与

$$S\cap\phi(Q)\neq\emptyset \quad \forall\phi\in\Gamma. \tag{2.6}$$

这将给寻找临界值增添活动的余地.

定理 2.5 设 $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\oplus\mathscr{X}_2$ 是一个 Banach 空间，有 $\dim\mathscr{X}_1<+\infty$. 又设 B_1 是 $\mathscr{X}_1$ 中的单位球，而 Ω 是 $\mathscr{X}_2$ 中的一个包含原点的有界开集. 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$ 满足 P. S. 条件. 倘若有

(1) $$\alpha=\max_{x\in B_1}\mathbf{f}(x)<\inf_{x\in\partial\Omega}\mathbf{f}(x)=a,$$

(2) $$\beta=\max_{x\in\partial B_1}\mathbf{f}(x)<\inf_{x\in\Omega}\mathbf{f}(x)=b,$$

令 $\Gamma=\{\phi\in C(\bar{B}_1,\mathscr{X})\,|\,\phi|_{\partial B_1}=id|_{\partial B_1}, \exists\psi: [0, 1]\times\bar{B}_1\to\mathscr{X},$

使得

$$\psi(0, \cdot)=id,\ \psi(1, \cdot)=\phi;$$

$$\mathbf{f}(\psi(t, x))\leqslant\mathbf{f}(x)\,\forall(t, x)\in[0, 1]\times\bar{B}_1\};$$

则

$$c=\inf_{\phi\in\Gamma}\sup_{x\in B_1}\mathbf{f}(\phi(x))$$

是 $\mathbf{f}$ 的一个临界值，并有 $c\geqslant b$.

证明 1° 取 $Q=\bar{B}_1$, $S=\Omega$. (2) 蕴含了 $\partial Q\cap S=\phi$. 我们证明：$\phi(Q)\cap S\neq\emptyset$, $\forall\phi\in\Gamma$. 这等价于：$\exists y\in Q$, $z\in S$ 使得

$$\phi(y)=(0, z);$$

即

$$\exists x=(y, z)\in Q\times S,$$

使得

$$\phi(Px)=(I-P)x,$$

其中 P 是 $\mathscr{X}\to\mathscr{X}_1$ 的一个投影算子. 因为对一切与 $\phi\in\Gamma$ 相联的 ψ,

$$\max_{x\in\partial B_1}\mathbf{f}(\psi(t,x))\leqslant\max_{x\in\partial B_1}\mathbf{f}(x)<\inf_{x\in\Omega}\mathbf{f}(x),$$

所以 $$\psi(t,\partial B_1)\cap\Omega=\emptyset;$$

又因为 $$\max_{x\in\bar{B}_1}\mathbf{f}(\psi(t,x))\leqslant\max_{x\in\bar{B}_1}\mathbf{f}(x)<\inf_{x\in\partial\Omega}\mathbf{f}(x),$$

所以 $$\psi(t,\bar{B}_1)\cap\partial\Omega=\emptyset.$$

于是 $\theta\notin(id-P-\psi(t,P\cdot))(\partial(B_1\times\Omega))$. 利用 Leray-Schauder 度, 及其同伦不变性得

$$\begin{aligned}&\deg(id-P-\phi\circ P,\ B_1\times\Omega,\ \theta)\\&=\deg(id-2P,\ B_1\times\Omega,\ \theta)\\&=\deg(-id_{\mathscr{X}_1},\ B_1,\ \theta)=(-1)^k,\end{aligned}$$

其中 $k=\dim\mathscr{X}_1$, 即得 $\phi(Q)\cap S\neq\emptyset$, $\forall\phi\in\Gamma$.

2° 因为 $id\in\Gamma$, 所以由(1), $c\leqslant\alpha$. 再由于: $\phi(Q)\cap S\neq\emptyset$, $\forall\phi\in\Gamma$, 以及(2), 推得 $\beta<b\leqslant c$. 取 $\varepsilon\in(0,b-\beta)$, 我们证明 Γ 在 $\Phi^{\beta}_{c-\varepsilon}(\mathbf{f})$ 作用下是不变的. 事实上, $\forall\eta\in\Phi^{\beta}_{c-\varepsilon}(\mathbf{f})$, $\forall\phi\in\Gamma$, 有 σ: $[0,1]\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}$, 满足:

$$\sigma(0,\cdot)=id,\ \sigma(1,\cdot)=\eta,$$

$$\mathbf{f}(\sigma(t,x))\leqslant\mathbf{f}(x),\quad\forall(t,x)\in[0,1]\times\mathscr{X},$$

并且 $$\sigma(t,\cdot)|_{\mathbf{f}_{c-\varepsilon}}=id|_{\mathbf{f}_{c-\varepsilon}};$$

以及 $$\psi:[0,1]\times\bar{B}_1\to\mathscr{X},\ \psi(0,\cdot)=id,\ \psi(1,\cdot)=\phi,$$

$$\mathbf{f}(\psi(t,x))\leqslant\mathbf{f}(x),\quad\forall(t,x)\in[0,1]\times B_1.$$

从而当令 $\psi_1(t,x)=\sigma(t,\psi(t,x))$ 时,

$$\psi_1(0,\cdot)=id,\ \psi_1(1,\cdot)=\eta\circ\phi,$$

$$\eta\circ\phi|_{\partial B_1}=id|_{\partial B_1}(\partial B_1\subset\mathbf{f}_\beta\subset\mathbf{f}_{c-\varepsilon}),$$

并且有 $\mathbf{f}(\psi_1(t,x))\leqslant\mathbf{f}(\psi(t,x))\leqslant\mathbf{f}(x)$, $\forall(t,x)\in[0,1]\times\bar{B}_1$; 即 $\eta\circ\phi\in\Gamma$.

定理 2.6(对偶环绕) 设 S 与 ∂Q 环绕. $\mathbf{f}$ 满足定理 2.1 中的一切条件. 则

$$d=\sup_{F^*\in\mathscr{F}^*}\inf_{x\in F^*}\mathbf{f}(x)\leqslant c$$

是 $\mathbf{f}$ 的一个临界值，其中 c 是定理 2.1 中的临界值，

$$\Gamma^* = \{h \in C(\mathscr{X}, \mathscr{X}) \mid \text{在上同胚 } h|_{\partial Q} = id_{\partial Q}\},$$

而

$$\mathscr{F}^* = \{h(S) \mid h \in \Gamma^*\}.$$

证明 因为 $id \in \Gamma^*$，所以 $\Gamma^* \neq \emptyset$，并且

$$d = \sup_{F^* \in \mathscr{F}^*} \inf_{x \in F^*} \mathbf{f}(x) \geqslant \inf_{x \in S} \mathbf{f}(x) \geqslant \beta,$$

又因为当 $h \in \Gamma^*$，$\phi \in \Gamma$ 时，$h^{-1} \circ \phi \in \Gamma$，所以

$$h(S) \cap \phi(Q) = h(S \cap h^{-1} \circ \phi(Q)) \neq \emptyset.$$

于是有

$$\inf_{x \in F^*} \mathbf{f}(x) \leqslant \inf_{\phi \in \Gamma} \sup_{x \in \phi(Q)} \mathbf{f}(x) = c, \tag{2.7}$$

即得 $d \leqslant c$.

为证 d 是临界值，注意到

$$-d = \inf_{F^* \in \mathscr{F}^*} \sup_{x \in F^*} (-\mathbf{f})(x),$$

只要证明 $\mathscr{F}^*$ 关于 $\Phi^h_{(-d-\varepsilon, -d+\varepsilon)}(-\mathbf{f})$（参看定理 1.5）是不变的就够了，其中 $\varepsilon \in (0, \beta-\alpha)$. 现在因为 $\partial Q \subset \mathbf{f}_\alpha \subset \mathbf{f}_{d-\varepsilon}$，而当

$$\psi \in \Phi^h_{(-d-\varepsilon, -d+\varepsilon)}(-\mathbf{f})$$

时，$\psi|_{\mathbf{f}_{d-\varepsilon}} = id|_{\mathbf{f}_{d-\varepsilon}}$ 并且 ψ 是 $\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 是在上同胚，所以

$$\psi \circ h \in \Gamma^*, \quad \forall h \in \Gamma^*.$$

注 2.3 用对偶环绕产生出的临界值 d 一般只知道小于或等于用原来环绕产生出的临界值 c，我们不知道是否有 $d = c$?

注 2.4 根据定理 2.2，山路引理有下列变化形式：

定理 2.3′ 设 $\mathbf{f} \in C^{2-0}(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$ 满足 P. S. 条件. 又设 x_0 是 $\mathbf{f}$ 的局部极小值点，且有 $x_1 \in \mathscr{X}$，使得

$$\mathbf{f}(x_1) \leqslant \mathbf{f}(x_0),$$

则 $\mathbf{f}$ 必有一个异于 x_0 的临界点.

这定理的许多应用参看张恭庆[Ch2, 3].

类似地，例 2 与例 3 中的环绕也有相应变化形式的临界值定理.

§3 山路引理在微分方程中的应用

尽管山路引理的证明是简单的，但这引理却非常有用．我们在这一节将讨论它在下列几个问题上的应用：超线性椭圆边值问题，超线性波方程的周期解，以及 Hamilton 方程组的周期解问题．

3.1 超线性椭圆边值问题

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是一个具有足够光滑边界的有界开区域．又设 $f\in C^\gamma(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$，$0<\gamma<1$，对 f 总添加下列增涨性假设：

(F_1) $\exists$ 常数 C_1, C_2 以及 $1<\alpha<\dfrac{N+2}{N-2}$（当 $N\geqslant3$）使得

$$|f(x, t)|\leqslant C_1+C_2|t|^\alpha$$

$\left(\text{当 } N=2\text{时，设 } |f(x, t)|\leqslant C_1e^{\beta t^2},\ \beta<\dfrac{1}{2}\right)$.

考察下列边值问题：

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x, u(x)), & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{3.1}$$

按第一章§5，我们知道(3.1)是下列泛函的 Euler 方程：

$$J(u)=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2-F(x, u)\right]dx,\ u\in H_0^1(\Omega),$$

其中
$$F(x, t)=\int_0^t f(x, \xi)d\xi.$$

因为
$$(J'(u), v)=\int_\Omega[\nabla u\cdot\nabla v-f(x, u)v]dx,\ \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

所以为了 u 是方程(3.1)的一个弱解，必须且仅须 u 是 J 的临界点．对于方程(3.1)，利用椭圆型方程弱解的正则性，每个弱解还是古典解．因此求解(3.1)的问题便化归为求 J 的临界点的问题．

方程(3.1)称为是超线性的(或次线性的)，是指其中的 $\left|\dfrac{f(x, t)}{t}\right|\to+\infty$（或 0）当 $t\to\infty$．对于超线性问题，有下列

定理 3.1 设 f 除条件(F_1)外还适合:

(F_2) $\exists\theta\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, M 都是常数,使得

$$F(x,\ t)\leqslant\theta tf(x,\ t),\quad 当\ |t|\geqslant M,$$

(F_3) $$\overline{\lim_{t\to0}}\frac{f(x,\ t)}{t}\leqslant\lambda_1-\varepsilon,\quad 对\ x\ 一致,$$

(F_4) $$\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{f(x,\ t)}{t}\geqslant\lambda_1+\varepsilon,\quad 对\ x\ 一致,$$

其中 $\varepsilon>0$, 而 λ_1 是 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边条件下的第一本征值; 则 (3.1)至少有一个非零解.

证明 应用山路引理. 为此逐条验证该引理的条件.

1° P. S. 条件. 设 $\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$, 满足:

$$|J(u_n)|\leqslant C,\ J'(u_n)\to\theta(H_0^1).$$

要证: 有强收敛子列 u_{n_i}.

先证 $\{u_n\}$ 有界. 事实上, 由(F_2)及 f 的连续性有 $M_1,\ M_2>0$ 使

$$\begin{aligned}C&\geqslant\frac{1}{2}\|u_n\|^2-\int_{|u_n(x)|\geqslant M}F(x,\ u_n(x))\mathrm{d}x-M_1\\&\geqslant\frac{1}{2}\|u_n\|^2-\theta\int_\Omega u_nf(x,\ u_n(x))\mathrm{d}x-M_2\\&=\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\|u_n\|^2+\theta\int(\nabla u_n\cdot\nabla u_n-f(x,\ u_n)u_n)-M_2\\&=\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\|u_n\|^2+\theta(J'(u_n),\ u_n)-M_2,\end{aligned}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是 H_0^1 模. 因设 $J'(u_n)\to0$, 所以

$$|(J'(u_n),\ u_n)|<\|u_n\|,\quad 当\ n\ 大$$

于是
$$C\geqslant\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\|u_n\|^2-\theta\|u_n\|-M_2$$

推得 $\|u_n\|$ 有界.

再证有强敛子列. 取 $p=\alpha+1$, 由嵌入定理, $\|u_n\|_{L^p}$ 有界, 从而 $\{f(x,\ u_n(x))\}$ 在 $L^{p'}(\Omega)$ 有界,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1;$$

便有弱收敛子列$\{f(x, u_{n_i}(x))\}$. 然而$K=(-\Delta)^{-1}: L^{p'}\to H_0^1(\Omega)$是紧的,所以$Kf(x, u_{n_i}(x))$在$H_0^1(\Omega)$中强收敛. 所以

$$J'(u_{n_i})=u_{n_i}-Kf(x, u_{n_i}(x))\to\theta,$$

蕴含了u_{n_i}强收敛.

2° 验证: ∃正常数α, ρ使得$J|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$, 其中$B_\rho$是中心在$\theta$, 半径为$\rho$的球.

事实上,条件(F_3)蕴含了∃常数$0<\varepsilon'<\varepsilon$, 以及$\delta>0$,使

$$\frac{f(x, t)}{t}\leqslant(\lambda_1-\varepsilon'),\ 当\ 0<|t|<\delta.$$

从而

$$F(x, t)\leqslant\frac{\lambda_1-\varepsilon'}{2}t^2,\ 当|t|<\delta.$$

联合条件(F_1)即得常数C_3使得

$$F(x, t)\leqslant\frac{1}{2}(\lambda_1-\varepsilon')t^2+C_3|t|^p,\quad p=\alpha+1.$$

利用嵌入定理以及 Poincaré 不等式,

$$\int F(x, u(x))\leqslant\frac{1}{2}\Big(1-\frac{\varepsilon'}{\lambda_1}\Big)\|u\|^2+C_3\int|u(x)|^p$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\Big(1-\frac{\varepsilon'}{\lambda_1}\Big)\|u\|^2+C_4\|u\|^p,$$

其中$C_4>0$是一个常数. 从而

$$J(u)\geqslant\frac{1}{2}\frac{\varepsilon'}{\lambda_1}\|u\|^2-C_4\|u\|^p.$$

取$\rho>0$足够小,以致

$$\alpha=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon'}{\lambda_1}\rho^2-C_4\rho^p>0,$$

即得$J|_{\partial B_\rho}\geqslant\alpha$.

3° 已知$J(\theta)=0$, 要找$u_0\in H_0^1$使得$u_0\notin B_\rho$, 但$J(u_0)=0$.

取$-\Delta$对0-Dirichlet边条件的第一本征函数φ_1, $\varphi_1>0$, 并设$\int_\Omega\varphi_1^2=1$. 考察下列函数

$$\phi(t)=J(t\varphi_1)=\frac{\lambda_1}{2}t^2-\int_\Omega F(x, t\varphi_1(x))\mathrm{d}x,\ t>0.$$

假设(F_4)蕴含了∃$0<\varepsilon'<\varepsilon$及$\beta>0$, 当$s\geqslant\beta$时,

$$f(x, s) \geqslant (\lambda_1+\varepsilon')s.$$

于是有与 t 无关的数 M' 与 M'' 使得

$$\begin{aligned}\int_\Omega F(x, t\varphi_1(x))\mathrm{d}x &\geqslant \int_{t\varphi_1(x)\geqslant\beta}\int_\beta^{t\varphi_1(x)} f(x, s)\mathrm{d}s\\&\quad -\int_\Omega\int_0^\beta |f(x, s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}x\\&\geqslant \frac{\lambda_1+\varepsilon'}{2}\int_\Omega (t^2\varphi_1^2(x)-\beta^2)_+\mathrm{d}x - M'\\&\geqslant \left(\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\varepsilon'}{4}\right)t^2 - M'', \quad 当\ t\to+\infty.\end{aligned}$$

这是因为 $\mathrm{mes}\left\{x\in\Omega\ |\varphi_1(x)<\frac{\beta}{t}\right\}\to 0$ 当 $t\to+\infty$. 于是有：$\phi(t)\to -\infty$ 当 $t\to+\infty$. 注意到

$$\phi\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda_1}}\right)=J\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda_1}}\varphi_1\right)\geqslant\alpha>0,$$

所以有 $t_0>\frac{\rho}{\sqrt{\lambda_1}}$ 适合：$\phi(t_0)=0$. 现在取 $u_0=t_0\varphi_1$，即得 $u_0\notin B_\rho$，$J(u_0)=0$. 直接应用山路引理得出方程(3.1)有一个非零解.

注 3.1　定理 3.1 中的 $-\Delta$ 可以被一般二阶对称椭圆算子所代替：

$$L=-\sum_{i,j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+a(x).$$

其中 a_{ij}, $a\in C^1(\overline{\Omega})$，并且 $a(x)\geqslant 0$,

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha_0\sum_{i=1}^N\xi_i^2,\quad \alpha_0>0,\quad \xi\in\mathbb{R}^N.$$

注 3.2　在文献中(参看 Rabinowitz [Ra2] Ambrosetti, Rabinowitz[AR1])条件 $(F_2)(F_4)$ 被较强的：

(F_2')　$\exists\theta\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 以及 $M>0$ 使得

$$0<F(x, t)\leqslant\theta t f(x, t), \quad 当\ |t|\geqslant M,$$

所代替. 而条件 (F_3) 也被换成较强的：

(F_3') $f(x, t)=o(t)$，当 $t\to 0$ 对 $x\in\overline{\Omega}$ 一致.

3.2　一类算子方程的非平凡解

我们考察一个一般形式的算子方程，然后将所得结果应用到一系列具体问题中去．

设$(Q, \mathscr{B}, \mu)$是一个测度空间，设$\mu(Q)<+\infty$．用A表示Hilbert空间$L^2(Q, \mathbb{R}^n)$上的一个自伴算子，有定义域$D(A)$；又设A的值域是闭的，P是到$R(A)$上的正交投影算子．作以下假设：

(A_1)　$\tilde{K}=A^{-1}P$可以连续地扩张为$L^{p'}(Q, \mathbb{R}^n)\to L^p(Q, \mathbb{R}^n)$的紧算子，其中$2<p<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$．

(A_2)　A至少有一个负本征值．

设$G\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$满足下列条件：

(G_1)　$z\mapsto G(z)$是严格凸函数，并且

$$G'(\theta)=\theta,\quad G(\theta)=0;$$

(G_2)　对于$\theta=\frac{1}{p}$，有常数M，$C>0$使得

$$\left.\begin{aligned}&G(z)\leqslant\theta G'(z)\cdot z,\\&G(z)\leqslant M|z|^{\frac{1}{\theta}},\end{aligned}\right.\quad 当|z|\geqslant C;$$

(G_3)　$\lim\limits_{|z|\to 0}\frac{G(z)}{|z|^2}=0$.

我们要解方程：

$$Au+G'(u)=\theta. \tag{3.2}$$

首先分析条件(G_1)与(G_2)．

引理 3.1　以下条件等价：

(1)　$0<G(z)\leqslant\theta z\cdot G'(z)$，当$|z|\geqslant C$，

(2)　$G(tz)\geqslant t^{\frac{1}{\theta}}G(z)>0$，$\forall t\geqslant 1$，$|z|\geqslant C$．

证明　$\forall z\in\mathbb{R}^n$，$|z|\geqslant C$，记$\Phi(t)=G(tz)$，$\Psi(t)=t^{\frac{1}{\theta}}G(z)$．

(2)$\Rightarrow$(1)．由$\Phi(t)\geqslant\Psi(t)$，$\forall t\geqslant 1$，以及$\Phi(1)=\Psi(1)$，推得$\Phi'(1)\geqslant\Psi'(1)$，即得

$$z\cdot G'(z)\geqslant\frac{1}{\theta}G(z).$$

(1)⇒(2).

$$\Phi'(t)=z\cdot G'(tz)=\frac{1}{t}(tz)\cdot G'(tz)\geqslant\frac{1}{t\theta}\Phi(t)\quad\forall t\geqslant 1,$$

推出

$$\ln\Phi(t)\Big|_1^t\geqslant\frac{1}{\theta}\ln t,$$

即得

$$G(tz)\geqslant t^{\theta}G(z).\quad\forall t\geqslant 1.$$

引理 3.2　设 $G(z)$ 满足 (G_1) 与 (G_2)，则必有常数 $m>0$ 及 $M>0$ 使得

$$G(z)\geqslant m|z|^{\frac{1}{\theta}},\quad 当|z|\geqslant C,$$

$$|G'(z)|\leqslant(2^{\frac{1}{\theta}}M-m)|z|^{\frac{1}{\theta}-1},\quad 当|z|\geqslant C.$$

证明　令

$$m=\operatorname*{Min}_{z\in\partial B_C}\frac{G(z)}{C^{\frac{1}{\theta}}},$$ B_C 是半径为 C 中心在 θ 的球.

则由 (G_1)，$m>0$. 按引理 3.1 及 (G_2)，

$$G(z)\geqslant G\left(\frac{Cz}{|z|}\right)\left(\frac{|z|}{C}\right)^{\frac{1}{\theta}}\geqslant m|z|^{\frac{1}{\theta}}.$$

由于 G 是凸的，

$$G(z)+G'(z)(u-z)\leqslant G(u).$$

让 u 跑遍以 z 为中心，$|z|$ 为半径的球 $B_{|z|}(z)$，取极大，得到

$$|G'(z)|\cdot|z|\leqslant M|u|^{\frac{1}{\theta}}-m|z|^{\frac{1}{\theta}}.$$

由于 $|u|\leqslant 2|z|$，即得所要的结论.

联合引理 3.2 与第一章定理 1.1 的注，Немыцкий 算子 $g: u\mapsto G'(u)$ 是 $L^p(Q,\mathbb{R}^n)\to L^{p'}(Q,\mathbb{R}^n)$ 连续的，其中 $p=\frac{1}{\theta}>2$.

一般来说不知道能否求得(3.2)的解 $u\in D(A)$，但可以引入

定义 3.1　$u\in L^p(Q,\mathbb{R}^n)$ 称为是(3.2)的一个弱解，如果

$$\langle u, Aw\rangle+\langle w, g(u)\rangle=0,\ \forall w\in D(A)\cap L^p(Q,\mathbb{R}^n),\qquad(3.3)$$

其中

$$\langle u, v\rangle=\int_Q u(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x,$$

当 $u\in L^p(Q, \mathbb{R}^n)$, $v\in L^{p'}(Q, \mathbb{R}^n)$.

本节的主要结果是

定理 3.2 设 A 是 $L^2(Q, \mathbb{R}^n)$上的一个自伴算子，有闭值域，适合条件(A_1), (A_2). 又设 $G\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$满足条件$(G_1)$, (G_2)与(G_3), g 是 G' 导出的 Немыцкий 算子；则方程(3.2)有一个非 θ 的弱解.

我们将采用对偶变分的方法，利用 G 的共轭函数

$$H(w)=\sup_{z\in\mathbb{R}^n}\{w\cdot z-G(z)\}. \tag{3.4}$$

按第二章推论 2.3, 以及 $G\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$是严格凸的，可见 $H\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$, 并且也是严格凸的.

引理 3.3 $H\in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$, 并满足：

$$H'(\theta)=\theta,\quad H(\theta)=0, \tag{3.5}$$

$$\frac{C_\theta}{M}|w|^{\frac{1}{1-\theta}}-C_1\leqslant H(w)\leqslant\frac{C_\theta}{m}|w|^{\frac{1}{1-\theta}}+C_2, \tag{3.6}$$

$$C'_\theta|w|^{\frac{\theta}{1-\theta}}-C_4\leqslant|H'(w)|$$

$$\leqslant C_\theta\left(\frac{2^{\frac{1}{1-\theta}}}{m}-\frac{1}{M}\right)|w|^{\frac{\theta}{1-\theta}}+C_3, \tag{3.7}$$

其中 C_1, …, C_4 都是常数，而 C_θ, C'_θ 是依赖于 θ 的常数，此外还有

$$\lim_{w\to\theta}\frac{H(w)}{|w|^2}=\infty. \tag{3.8}$$

证明 根据第二章 §2, 推论 2.2, $G'(\theta)=\theta\Rightarrow H'(\theta)=\theta$. 又直接从定义推得 $H(\theta)=\theta$. (3.5)得证.

证(3.6). 由(G_2), $\exists C_1>0$ 使得 $G(z)\leqslant M|z|^{\frac{1}{\theta}}+C_1$, $\forall z\in\mathbb{R}^n$. 利用第二章 § 2 性质 2° 以及例 5 推得

$$H(w)\geqslant\frac{C_\theta}{M}|w|^{\frac{1}{1-\theta}}-C_1,\quad C_\theta=\frac{1}{M^{\frac{\theta}{1-\theta}-1}}\left(\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}}-\theta^{\frac{1}{1-\theta}}\right).$$

同理按引理 3.2, 有 $C_2>0$ 使

$$G(z)\geqslant m|z|^{\frac{1}{\theta}}-C_2,$$

推出
$$H(w)\leqslant\frac{C_\theta}{m}\,|w|^{\frac{1}{1-\theta}}+C_2.$$

证(3.7). 类似于引理 3.2 对 H' 作估计得

$$|H'(w)|\leqslant C_\theta\left(\frac{2^{\frac{1}{1-\theta}}}{m}-\frac{1}{M}\right)|w|^{\frac{\theta}{1-\theta}}+C_3,$$

其中 $C_3=\max\{C_1+C_2,\ \sup\limits_{|w|\leqslant 1}|H'(w)|\}$. 再由引理 3.2 中关于 $G'(z)$ 的估计式，以及互逆关系

$$z=H'(w)\Leftrightarrow w=G'(z);$$

推得
$$|w|\leqslant(2^{\frac{1}{\theta}}M-m)|H'(w)|^{\frac{1}{\theta}-1},\ 当\,|H'(w)|\geqslant C.$$

但因有常数 M_C 使得

$$|z|=|H'(w)|\leqslant C\ 时,\quad |w|=|G'(z)|\leqslant M_C.$$

取
$$C'_\theta=(2^{\frac{1}{\theta}}M-m)^{\frac{\theta}{\theta-1}},\quad C_4=C'_\theta M_C^{\frac{\theta}{1-\theta}},$$

就有
$$|H'(w)|\geqslant C'_\theta|w|^{\frac{\theta}{1-\theta}}-C_4.$$

最后证(3.8). 按条件(G_3), $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $|z|<\delta$ 时,

$$G(z)\leqslant\varepsilon|z|^2.$$

今对任意 $K>0$, 取

$$\varepsilon=\frac{1}{4K},\quad \eta=2\varepsilon\delta(\varepsilon),$$

则当 $|w|<\eta$ 时,

$$H(w)\geqslant\frac{1}{4\varepsilon}|w|^2=K|w|^2.$$

引理 3.4 存在依赖于 $\delta>0$ 的常数 $C_\delta,\ C_{\delta'}>0$ 使得

$$H(z)\geqslant\begin{cases}C_\delta|z|^2, & 当\,|z|\leqslant\delta,\\ C'_\delta|z|^{\theta'}, & 当\,|z|\geqslant\delta,\end{cases}$$

并且 $C_\delta\to+\infty$ 当 $\delta\to+0$.

证明 由(3.8)知

$$\lim_{|z|\to 0}\frac{H(z)}{|z|^2}=+\infty.$$

于是 $C_\delta \triangleq \inf\{H(z)/|z|^2 \mid |z|\leqslant\delta\}\to+\infty$ 当 $\delta\to+0$，使得

$$H(z)\geqslant C_\delta|z|^2,\quad \text{当 } |z|\leqslant\delta. \tag{3.9}$$

再证后一个不等式，$\forall z_0$，$\|z_0\|=1$，令 $\phi_{z_0}(t)=H(tz_0)$，则

$$\phi'_{z_0}(t)=H'(tz_0)\cdot z_0.$$

因为 ϕ_{z_0} 是凸的，所以 $\forall t>0$，有

$$\phi'_{z_0}(t)\geqslant\frac{1}{t}\,\phi_{z_0}(t).$$

于是由(3.9)，

$$H'(\delta z_0)\cdot z_0\geqslant C_\delta\cdot\delta,$$

再由凸性，

$$\begin{aligned}H(sz_0)&\geqslant H'(\delta z_0)\cdot(s-\delta)z_0+H(\delta z_0)\\&\geqslant C_\delta\delta(s-\delta)+C_\delta\delta^2=C_\delta\delta s,\quad \forall s>0.\end{aligned}$$

于是有

$$H(z)\geqslant C_\delta\cdot\delta|z|,\quad \forall z\in\mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

再利用引理 3.3，$\exists T>0$，当 $|z|>T$ 时，

$$H(z)\geqslant\frac{C_\theta}{2M}|z|^{p'}. \tag{3.11}$$

联合(3.9)，(3.10)与(3.11)并令 $C'_\delta=\min\left\{\frac{C_\theta}{2M},\ T^{1-p'}\delta C_\delta\right\}$便有

$$H(z)\geqslant\begin{cases}C_\delta|z|^2, & \text{当 } |z|<\delta,\\ C'_\delta|z|^{p'}, & \text{当 } |z|\geqslant\delta.\end{cases}$$

引理 3.5 设 $u_m\rightharpoonup u$ 弱$(L^{p'}(Q,\mathbb{R}^n))$，并且

$$\int_Q H(u_m)\to\int_Q H(u);$$

则

$$\int_Q H(u_m-u)\to0.$$

证明 1° 先证$\{H(u_m)\}$有等度连续的积分，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 使得

$$\int_\Omega H(u_m)<\varepsilon,\quad \text{只要 } \mu(\Omega)<\delta,\ \forall n.$$

这是因为 H 是凸的，有

$$H'(u)\cdot(u_m-u)\leqslant H(u_m)-H(u),$$

当 $m\to\infty$，注意到 $u_m\to u$（弱），所以

$$\int_\Omega H(u)\leqslant\varliminf_{m\to\infty}\int_\Omega H(u_m). \tag{3.12}$$

又因为由假设：$\int_Q H(u_m)\to\int_Q H(u)$，而 $H\geqslant 0$，所以必有

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega H(u_m)=\int_\Omega H(u). \quad \forall \text{ 可测集 } \Omega.$$

现在倘若 $\{H(u_m)\}$ 没有等度连续的积分，于是有 $\varepsilon_0>0$，函数 u_{m_k} 以及可测集 Ω_k；使得

$$\int_\Omega H(\pm u)<\varepsilon_0 \quad \text{只要 } \Omega \text{ 可测，且 } \mu(\Omega)<\delta. \tag{3.13}$$

但

$$\int_{\Omega_k} H(u_{n_k})\geqslant\varepsilon_0, \quad \mu(\Omega_k)<\frac{\delta}{2^k}.$$

今取 $\Omega_0=\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k$；则 $\mu(\Omega_0)<\delta$，但

$$\int_{\Omega_0} H(u_{n_k})\geqslant\int_{\Omega_k} H(u_{n_k})\geqslant\varepsilon_0.$$

这便与 (3.12)，(3.13) 矛盾.

2° $\forall a>0$，分 Q 为如下三族子集：

$Q_1=\{x\in Q \mid |u(x)|>a\}$,

$Q_2^m=\{x\in Q \mid |u(x)|\leqslant a,\ |u_m(x)-u(x)|\geqslant\delta\}$,

$Q_3^m=\{x\in Q \mid |u(x)|\leqslant a,\ |u_m(x)-u(x)|<\delta\}$.

注意到不等式 (3.6) 蕴含了存在正常数 K，C 使

$$H(2z)\leqslant KH(z)+C, \quad \forall z\in\mathbb{R}^n.$$

在 Q_1 上，由 H 的凸性，

$$H(u_m-u)\leqslant\frac{1}{2}[H(2u_m)+H(-2u)]$$

$$\leqslant\frac{K}{2}(H(u_m)+H(-u))+C;$$

所以由 1°，只要取 a 充分大然后固定，$\mu(Q_1)$ 便足够小，可使

$$\int_{Q_1} H(u_m-u)\leqslant\frac{K}{2}\int_{Q_1} H(u_m)+H(-u)+C\mu(Q_1)$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.14}$$

对固定的 a，选 $\delta>0$ 足够小，便有

$$\int_{Q_1^m} H(u_m-u)<\varepsilon/3. \tag{3.15}$$

再固定 δ，令

$$\gamma=\inf_{\substack{|w-z|\geq\delta\\ \|z\|<a}}[H(w)-H(z)-H'(z)(w-z)],$$

则 $\gamma>0$. 事实上，由 H 的凸性，$\gamma\geq 0$. 又因为 H 是严格凸的，所以对任意固定的 z，并沿射线 $w=z+ty$，$|y|=1, t\geq\delta$，这个下确界在 $t=\delta$ 处取到，并且 >0；然而 z 跑遍半径为 a 的球，而 y 跑遍单位球面；所以 $\gamma>0$.

现在在 Q_2^m 上，因为

$$\gamma\mu(Q_2^m)\leqslant\int_{Q_2^m} H(u_m)-H(u)-H'(u)\cdot(u_m-u)$$

$$\leqslant\int_Q H(u_m)-H(u)-H'(u)(u_m-u),$$

令 $m\to\infty$，则不等式右端趋于零，从而有

$$\mu(Q_2^m)\to 0.$$

这蕴含了 $\int_{Q_2^m} H(u_m)\to 0$. 重复在 Q_1 上的作法，$\exists n_0$，当 $m>n_0$，

$$\int_{Q_2^m} H(u_m-u)<\varepsilon/3. \tag{3.16}$$

联合(3.14)，(3.15)与(3.16)便得到

$$\lim_{m\to\infty}\int_Q H(u_m-u)=0.$$

推论 3.1 为了 $u_m\to u(L^p(Q,\mathbb{R}^n))$，必须且仅须

$$\int_Q H(u_m-u)\to 0$$

证明 $\Rightarrow$. $u_m\to u$ 蕴含了 $u_m\rightharpoonup u$(弱)，又因为有不等式(3.6)由复合算子的连续性，$H(u_m)\to H(u)(L^1(Q,\mathbb{R}^1))$. 即得

$$\int_Q H(u_m)\to\int_Q H(u).$$

应用引理 3.5 便证得所要的结论.

$\Leftarrow$. 按引理 3.4，有常数 C_1, $C_2>0$ 使得

$$\int H(u) \geqslant C_1 \int_{|u|\geqslant\delta} |u|^{p'} + C_2 \int_{|u|<\delta} |u|^2$$
$$\geqslant C_1 \int_{|u|\geqslant\delta} |u|^{p'} + C_2 \mu(Q)^{\frac{2}{p'-2}} \left(\int_{|u|<\delta} |u|^{p'}\right)^{\frac{2}{p'}}$$
$$\geqslant C_5 \min\left\{\int |u|^{p'}, \left(\int |u|^{p'}\right)^{2/p'}\right\}.$$

取 $\delta>0$ 足够小，$C_5>0$ 是一常数.

现在回过来讨论方程(3.2)．作一系列转化.

第一步

引入空间

$$E=\{v\in L^{p'}(Q, \mathbb{R}^n) \mid \langle\phi, v\rangle=0 \forall \phi\in \mathfrak{N}(A)\cap L^p(Q, \mathbb{R}^n)\},$$

其中 $\mathfrak{N}(A)=\{u\in D(A) \mid Au=\theta\}$.

求 $\{v, \chi\}\in E\times(\mathfrak{N}(A)\cap L^p(Q, \mathbb{R}^n))$ 满足：

$$\chi=\widetilde{K}v+h(v), \tag{3.17}$$

其中 h 是由 H' 导出的复合算子，由引理 3.3，h: $L^{p'}(Q, \mathbb{R}^n)\to L^p(Q, \mathbb{R}^n)$，是连续的.

事实上，若 $\{v, \chi\}$ 是(3.17)的解，则当令

$$u=h(v)$$

时，便有 $u\in L^p(Q, \mathbb{R}^n)$，并且

$$\begin{aligned}&\langle u, Aw\rangle+\langle w, g(u)\rangle\\&=\langle h(v), Aw\rangle+\langle w, v\rangle\\&=\langle \chi-\widetilde{K}v, Aw\rangle+\langle w, v\rangle\\&=-\langle v, \widetilde{K}Aw\rangle+\langle w, v\rangle=0,\end{aligned}$$

$\forall w\in D(A)\cap L^p(Q, \mathbb{R}^n)$.

第二步　化归为求下列泛函的临界点：

$$J(v)=\frac{1}{2}\langle\widetilde{K}v, v\rangle+\int_Q H(v), \quad v\in E. \tag{3.18}$$

这是因为 J 可以看成 $L^{p'}(Q, \mathbb{R}^n)$ 上相应形式的 C^1 连续泛函 $\tilde{J}$ 在 E 上的限制．而

$$\tilde{J}'(v)=\widetilde{K}v+H'(v),$$

因为
$$\langle \tilde{J}'(v)-J'(v), w\rangle=0, \quad \forall w\in E.$$

所以有 $\chi_v\in E^\perp=\mathfrak{N}(A)\cap L^p(Q, \mathbb{R}^n)$ 使得

$$\tilde{J}'(v)-J'(v)=\chi_v.$$

于是，如果 v^* 是 J 在 E 上的临界点 $J'(v^*)=\theta$，就一定有 $\chi^*\in E^\perp$，使得

$$\tilde{K}v^*+H'(v^*)=\chi^*,$$

即 $\{v^*, \chi^*\}$ 是(3.17)的解.

现在应用山路引理证明定理 3.2.

1° J 在 E 上满足 P. S. 条件. 设

$$\begin{cases}C_1\leqslant J(v_m)\leqslant C_2, & (3.19)\\ J'(v_m)\to\theta\ (E'), & (3.20)\end{cases}$$

要证有 $\{v_m\}$ 的强收敛子列. 先证 $\{v_m\}$ 是有界的. 事实上，由

$$w_m=\tilde{K}v_m+H'(v_m)-\chi_{v_m}\to\theta$$

$$C_1\leqslant\frac{1}{2}\langle\tilde{K}v_m, v_m\rangle+\int_Q H(v_m)\leqslant C_2$$

蕴含了 $\forall\varepsilon>0\exists n(\varepsilon)>0$ 当 $m\geqslant n_0$,

$$\int H(v_m)-\frac{1}{2}H'(v_m)v_m\leqslant C_2+\frac{\varepsilon}{2}\|v_m\|_{L^{p'}}, \tag{3.21}$$

但由引理 3.1 与 3.2，有正常数 α 及 C_3, C_4, C_5 使得

$$\begin{aligned}H(z)-\frac{1}{2}H'(z)\cdot z&=\frac{1}{2}wG'(w)-G(w)\\ &\geqslant\left(\frac{1}{2\theta}-1\right)G(w)-C_3\\ &\geqslant m|w|^{\frac{1}{\theta}}\left(\frac{1}{2\theta}-1\right)-C_4\\ &\geqslant\alpha|z|^{p'}-C_5,\end{aligned} \tag{3.22}$$

其中 $z=G'(w)$, $w=H'(z)$. 联合(3.21)与(3.22)即得

$$\|v_m\|_{L^{p'}(Q,\mathbb{R}^n)}\leqslant C_6,\ \text{常数}.$$

再证 $\{v_m\}$ 有强收敛子列. 因为 $L^{p'}(Q, \mathbb{R}^n)$ 自反，所以有弱收敛子列 $v_{m_k}\rightharpoonup v^*$.

一方面，由凸性，

$$H(v^*)+H'(v^*)\cdot(v_{m_k}-v^*)\leqslant H(v_{m_k});$$

所以

$$\int_Q H(v^*) \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} \int H(v_{m_k}). \tag{3.23}$$

另一方面，还是由凸性，

$$\begin{aligned} H(v^*) &\geqslant H(v_{m_k}) + H'(v_{m_k}) \cdot (v^* - v_{m_k}) \\ &= H(v_{m_k}) + (-\bar{K} v_{m_k} + w_{m_k} + \chi_{m_k}) \cdot (v^* - v_{m_k}). \end{aligned}$$

按假设(A_1)，以及 $w_{m_k} \to \theta$，又推出：

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \int_Q H(v_{m_k}) \leqslant \int_Q H(v^*). \tag{3.24}$$

联合(3.23)与(3.24)，应用引理 3.5 以及推论 3.1 便推出：

$$v_{m_k} \to v^* (L^{p'}(Q, \mathbb{R}^n)).$$

2° $\exists \rho, r > 0$ 使得

$$J|_{\partial B_r} \geqslant \rho > 0 \tag{3.25}$$

设 $\beta = \|\bar{K}\|_{\mathscr{L}(L^{p'}, L^p)}$，应用引理 3.4，取 $\delta > 0$ 使 C_δ 足够大，再取 $r > 0$ 足够小，则当 $\|v\|_{L^{p'}} = r$ 时，存在常数 $C_7 > 0$ 满足：

$$C_\delta \int_{|v|<\delta} |v|^2 - 2\beta \left(\int_{|v|<\delta} |v|^{p'} \right)^{\frac{2}{p'}} \geqslant C_7 \left(\int_{|v|<\delta} |v|^{p'} \right)^{\frac{2}{p'}}, \tag{3.26}$$

$$C'_\delta \int_{|v|\geqslant\delta} |v|^{p'} - 2\beta \left(\int_{|v|\geqslant\delta} |v|^{p'} \right)^{\frac{2}{p'}} \geqslant C_7 \left(\int_{|v|\geqslant\delta} |v|^{p'} \right)^{\frac{2}{p'}}. \tag{3.27}$$

由初等不等式：

$$a^\alpha + b^\alpha \leqslant (a+b)^\alpha \leqslant 2^\alpha (a^\alpha + b^\alpha),$$

其中 $a, b > 0$，而 $\alpha > 1$；得到

$$\begin{aligned} J(v) &\geqslant -\frac{\beta}{2} \|v\|^2_{L^{p'}} + C_\delta \int_{|v|<\delta} |v|^2 + C'_\delta \int_{|v|\geqslant\delta} |v|^{p'} \\ &\geqslant C_7 \left[\left(\int_{|v|<\delta} |v|^{p'} \right)^{\frac{2}{p'}} + \left(\int_{|v|\geqslant\delta} |v|^{p'} \right)^{\frac{2}{p'}} \right] \\ &\geqslant \frac{C_7}{2^{2/p'}} \|v\|^2_{L^{p'}} = \frac{C_7}{2^{2/p'}} r^2. \end{aligned}$$

取 $\rho = \frac{C_7}{2} r^2$ 即可。

3° 显然有 $J(\theta)=0$，令 λ_1 为 K 的一个负本征值．ϕ 为它对应的一个本征元．则 $\phi\in E$，

$$J(t\phi)\leqslant\frac{\lambda_1}{2}t^2\int_Q|\phi|^2+\frac{C_\theta}{m}t^{p'}\int_Q|\phi|^{p'}+C_2\mu(Q)$$

$$\to-\infty,\quad 当\ t\to+\infty.$$

联合 1°，2° 与 3° 以及山路引理，J 有正临界值．从而(3.2)有非零解．

3.3 半线性波方程的周期解

一维半线性波方程的自由振动，归结为下列偏微分方程：

$$u_{tt}-u_{xx}+\mathbf{f}(t,x;u)=0,\quad \forall(x,t)\in(0,\pi)\times\mathbb{R}^1,\qquad (3.28)$$

连同边界条件

$$u(t,0)=u(t,\pi)=0;\qquad (3.29)$$

其中 $\mathbf{f}$：$[0,2\pi]\times(0,\pi)\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$，满足 Caratheodory 条件．求问题(3.28)，(3.29)关于 t 的 2π-周期解．

如果假设 $\mathbf{f}(x,0)\equiv0$，那么 $u\equiv0$ 显然是(3.28)，(3.29)的一个平凡解．我们想找非平凡解存在的条件．这种非平凡解就称为**自由振动**．

对 $\mathbf{f}$ 适当添加增涨性限制，方程(3.28)，(3.29)可以看成是下列泛函的 Euler 方程：

$$J(u)=\int_Q\left[\frac{1}{2}(u_t^2-u_x^2)-F(x,u(t,x))\right]dxdt,\qquad (3.30)$$

其中 $Q=[0,2\pi]\times(0,\pi)$，

$$F(x,\xi)=\int_0^\xi\mathbf{f}(x,s)ds,$$

函数 u 属于下列 Соболев 空间：

$$\mathring{H}_0^1(Q)\triangleq\{u\in W_2^1(Q)\,|\,u(0,t)=u(\pi,t)=0,$$

$$u(x,t)对\ t\ 2\pi\text{-周期}\}.$$

注意到 J 在 $\mathring{H}_0^1(Q)$ 上是既无上界又无下界的，所以不能指望通过求泛函极值的方法找到临界点．我们期望利用上一段的定理 3.2．为此把方程(3.28)，(3.29)看成是(3.2)的特殊形式．在第

一章§6.2我们已经验证了微分算子 $\Box=\partial_t^2-\partial_x^2$ 在 $L^2(Q)$ 上可以自伴扩张，并满足定理3.2中的条件 (A_1)，(A_3).

定理3.3 设 $g: \mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 满足：

(G_1) g 是严格单调递增的连续函数， (3.31)

(G_2')
$$\lim_{z\to\pm\infty}\frac{g(z)}{|z|^{p-2}z}=a_\pm \text{ 存在}, \tag{3.32}$$

并有 $a_\pm>0$.

(G_3)
$$\lim_{z\to 0}\frac{g(z)}{z}=0, \tag{3.33}$$

则存在 $u\in L^\infty(Q)$ 是方程

$$\Box u+g(u)=0 \tag{3.34}$$

的弱解．确切地说，

$$\int u\Box w+g(u)w=0, \tag{3.35}$$

$\forall w\in \dot{C}_0^\infty(Q)=\{u\in C^\infty(Q)\mid$ 支集在 $[0, 2\pi]\times(0, \pi)$ 紧，且对 t 2π-周期$\}$.

证明 按定理3.2，存在 $u\in L^p(Q)$ 适合等式(3.35)．以下验证 $u\in L^\infty(Q)$．事实上，因为

$$u=\tilde{K}v+\chi,$$

其中 $v\in E=L^{p'}(Q)\cap\mathfrak{N}(\Box)^\perp$，$\tilde{K}$ 是 A^{-1} 的扩张而 $\chi\in\mathfrak{N}(\Box)$．按第一章引理6.6，

$$\|\tilde{K}v\|_{L^\infty}\leqslant 3\|v\|_{L^1}\leqslant 3(2\pi^2)^{\frac{1}{p}}\|v\|_E\triangleq M \tag{3.36}$$

问题化归验证 $\chi\in L^\infty$．由第一章引理6.3，

$$\chi(t, x)=p(t+x)-p(t-x), \tag{3.37}$$

又化归验证 $p\in L^\infty(0, 2\pi)$．如今 $\chi\in L^p(Q)$，蕴含了 $p\in L^p(0, 2\pi)$．联合(3.36)，(3.37)得

$$-M+p(t+x)-p(t-x)\leqslant u(t, x)\leqslant M+p(t+x)-p(t-x),$$

即是

$$g(-M+p(t+x)-p(t-x))$$
$$\leqslant v(t, x)\leqslant g(M+p(t+x)-p(t-x)). \tag{3.38}$$

然而 $v\in\mathfrak{N}(\square)^{\perp}$，这意味着

$$\int_0^{\pi}[v(t-x,\,x)-v(t+x,\,x)]\,\mathrm{d}x=0\quad 对\ \text{a.e. } t\in(0,\,2\pi).\tag{3.39}$$

当令
$$\tilde{g}(z)=\frac{1}{2}[g(z)-g(-z)]$$
时，$\tilde{g}(z)$对 z 是递增的奇函数. 联合(3.38)与(3.39)又有

$$\int_0^{2\pi}\tilde{g}(-M+p(t)-p(s))\,\mathrm{d}s\leqslant 0,\ 对\ \text{a.e. } t\in(0,\,2\pi);\tag{3.40}$$

$$\int_0^{2\pi}\tilde{g}(M+p(t)-p(s))\,\mathrm{d}s\geqslant 0,\ 对\ \text{a.e. } t\in(0,\,2\pi).\tag{3.41}$$

由于$p\in L^p(0,2\pi)$而$\tilde{g}$ 是对 z $p-1$ 次幂增涨的,所以 $\tilde{g}(-M+p(t)-p(s))$ 对 s 是可积的. 注意到 $\tilde{g}(z)\to\pm\infty$ 当 $z\to\pm\infty$, 所以(3.40)蕴含了$\text{ess sup } p(t)<+\infty$. 同理,(3.41)蕴含了

$$\text{ess inf } p(t)>-\infty.$$

合起来 $p\in L^{\infty}(0,\,2\pi)$.

以下我们转向较弱的条件.

定理 3.4*　设 g 满足条件(G_1), (G_3)以及

(G_2')　　$\exists$ 常数 C 及 $\alpha>0$ 使得

$$\frac{1}{2}tg(t)-G(t)\geqslant\alpha g(t)-C,\tag{3.42}$$

$$\lim_{|t|\to+\infty}\frac{g(t)}{t}=+\infty,\tag{3.43}$$

则方程(3.34)至少有一个非零周期解 $u\in L^{\infty}(Q)$.

证明　1° 对任意 $M>0$,考察截断函数:

$$g_M(z)=\begin{cases}g(M)+g(M)^{p-1}(z-M)^{p-1}, & 当\ z>M,\\ g(z), & 当\ |z|\leqslant M,\\ g(-M)-g(-M)^{p-1}|z+M|^{p-1}, & 当\ z<-M.\end{cases}$$

于是函数 $g_M(z)$满足(G_1), (G_2')与(G_3). 对它应用定理3.3, $\exists u_M\neq\theta$ 在弱的意义下适合.

$$\square u_M+g_M(u_M)=0.$$

---

* 这个较精细的结果与本专题无关,读者可以把它略去.

现在要证：上面得到的 u_M 有一致的 L^∞ 界，即 $\exists C>0$ 使得：

$$\|u_M\|_{L^\infty}<C.$$

一旦做到了这一点，只需取 $M>C$，那么因为这时 $g(u_M)=g_M(u_M)$，u_M 就是方程(3.34)的弱解了.

2° 为此，我们只要证明有常数 C_1, C_2 使得

$$\|u_M\|_{L^1(Q)}\leqslant C_1, \tag{3.44}$$

$$\|v_M\|_{L^1(Q)}\leqslant C_2,\ \text{其中}\ v_M=g_M(u_M) \tag{3.45}$$

就够了. 因为一旦(3.44)与(3.45)成立，按第一章引理 6.6，有

$$\|\widetilde{K}v_M\|_{L^\infty(Q)}\leqslant 3\|v_M\|_{L^1(Q)}\leqslant 3C_2$$

以及
$$\|\chi_M\|_{L^1}=\|u_M-\widetilde{K}v_M\|_{L^1}\leqslant C_1+3C_2.$$

从而有 $q_M\in L^1(0,2\pi)$ 使得 $\chi_M=Z_{q_M}$(见第一章引理 6.3)，以及

$$\|q_M\|_{L^1}\leqslant C_3(\text{仅依赖于}\ C_1,\ C_2\ \text{的常数}).$$

在定理 3.3 的证明中，我们已经得到

$$\int_0^{2\pi}\tilde{g}_M(-2C_1+q_M(t)-q_M(s))\mathrm{d}s\leqslant 0\ \text{对 a.e.}\ t\in(0,2\pi).$$

令
$$\mu_M=\operatorname{ess}\sup_{t\in(0,2\pi)}q_M(t),$$

将证 μ_M 有界. 令 $\Sigma=\left\{s\in[0,\ 2\pi]\,\middle|\,q_M(s)\geqslant\frac{\mu_M}{2}\right\}$，则

$$\operatorname{mes}(\Sigma)\leqslant\frac{2}{\mu_M}\|q_M\|_{L^1}<\frac{2C_3}{\mu_M},$$

从而
$$\operatorname{mes}(C\Sigma)\geqslant 2\pi-\frac{2C_3}{\mu_M}.$$

令 $t\in T\triangleq\{t\in[0,2\pi]\,|\,q_M(t)\geqslant\mu_M-1\}$，它是非零测集. 于是

$$\tilde{g}_M\left(-2C_1-1+\frac{\mu_M}{2}\right)\cdot\operatorname{mes}(C\Sigma)\leqslant 2\pi\tilde{g}_M(-2C_1+1),$$

即得

$$\tilde{g}_M\left(-2C_1-1+\frac{\mu_M}{2}\right)\left(2\pi-\frac{2C_3}{\mu_M}\right)\leqslant 2\pi\tilde{g}_M(-2C_1+1).$$

这蕴含了 μ_M 有上界. 同理证明

$$\operatorname{ess}\inf_{t\in[0,2\pi]}q_M(t)\quad\text{有不依赖于}\ M\ \text{的下界.}$$

这便证明了 $\|q_M\|_{L^\infty[0,2\pi]}\leqslant C_4$(某常数). 从而 $\|\chi_M\|_{L^\infty(Q)}\leqslant 2C_4$，从而

$$\|u_M\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant\|\widetilde{K}v_M\|_{L^\infty(\Omega)}+\|\chi_M\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant 3C_2+2C_4.$$

即得所要的一致 L^∞ 估计.

3° 现在来证明 (3.44) 与(3.45). (G_1) 蕴含了 g 有反函数，记作 h. 按定义, g_M 有反函数

$$h_M(v)=\begin{cases}h(N)+\dfrac{(v-N)^{p'-1}}{N}, & \text{当 } v>N,\\ h(v), & \text{当 } |v|\leqslant N,\\ h(\overline{N})-\dfrac{|-v+\overline{N}|^{p'-1}}{-\overline{N}}, & \text{当 } v<\overline{N},\end{cases}$$

其中 $N=g(M)$, $\overline{N}=g(-M)$记 $H_M(z)=\int_0^z h_M(s)\mathrm{d}s$, 则

$$H_M(v)=\begin{cases}H(N)+h(N)(v-N)+\dfrac{(v-N)^{p'}}{p'N}, & \text{当 } v>N,\\ H(v), & \text{当 } |v|\leqslant N,\\ H(\overline{N})+h(\overline{N})(v-\overline{N})+\dfrac{|v-\overline{N}|^{p'}}{-p'\overline{N}}, & \text{当 } v<\overline{N}.\end{cases}$$

条件(G_2)蕴含了

$$H(v)-\frac{1}{2}h(v)v\geqslant\alpha|v|-C \quad (\text{Young 等式}), \tag{3.46}$$

以及

$$\lim_{v\to\infty}\frac{h(v)}{v}=0. \tag{3.47}$$

而(3.47)蕴含了

$$\|u_M\|_{L^1}=\|h_M(v_M)\|_{L^1}\leqslant\|v_M\|_{L^1}+C_5.$$

问题便集中到验证(3.45)，即$\|v_M\|_{L^1}\leqslant C_3$. 而由不等式(3.46)可见

$$H_M(v)-\frac{1}{2}h_M(v)v\geqslant\frac{\alpha}{2}|v|-C. \quad (\text{不妨设 } \alpha<1)$$

又有

$$H_M(v)\leqslant\begin{cases}H(v)+\dfrac{|v-N|^{p'}}{p'N}, & \text{当 } v>N,\\ H(v)-\dfrac{|v-\overline{N}|^{p'}}{p'\overline{N}}, & \text{当 } v<\overline{N}.\end{cases}$$

对任给 $\varepsilon>0$, 便有不依赖于 N 的常数 C_ε 使得

$$H_M(v)\leqslant \varepsilon v^2+C_\varepsilon.$$

因为 v_M 是定理 3.3 中确定的临界点，所以

$$\begin{aligned}J_M(v_M)&=\frac{1}{2}\langle \bar{K}v_M,\ v_M\rangle+\int H_M(v_M)\\&=\int H_M(v_M)-\frac{1}{2}h_M(v_M)\cdot v_M\\&\geqslant\frac{\alpha}{2}\int|v_M|-C.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}J_M(v_M)&\leqslant\sup_{t>0}J_M(t\phi)\\&\leqslant\sup_{t>0}\left(-\frac{\lambda_1}{2}t^2a^2+\varepsilon t^2a^2+C_\varepsilon|Q|\right)\end{aligned}$$

其中 $a^2=\int|\phi|^2$，而 ϕ 是 $\bar{K}$ 的对应于负本征值 $-\lambda_1$ 的本征元，所以当取 $\varepsilon<\frac{\lambda_1}{2}$ 时，得到 $J_M(v_M)$ 的一致界．这就导出了

$$\int|v_M|\leqslant C_2.$$

至此定理证毕．

注 3.3 在 H. Brezis, L. Nirenberg[BN2] 以及 P. H. Rabinowitz[Ra1] 中，研究了解 u 的正则性．事实上，解的正则性可以抬高到下述情形：$u=u_1+u_2$，其中

$$\begin{aligned}&u_1=\bar{K}v\in C^1(\bar{Q})\cap\mathfrak{N}(\square)^\perp,\\&u_2\in C(\bar{Q})\cap\mathfrak{N}(\square)\end{aligned}$$

（参看[Ra1]定理 2）．如果进一步假设 $g\in C^1(\mathbb{R}^1)$，那么解的正则性还可以抬高到：$u_1\in C^2(\bar{Q})\cap\mathfrak{N}(\square)^\perp$，$u_2\in C^1(\bar{Q})\cap\mathfrak{N}(\square)$．

注 3.4 方程(3.34)中函数 g 不依赖于 t，人们自然会问：那些根本与 t 无关的解

$$\begin{cases}-u_{xx}+g(u)=0, & 0<x<\pi,\\ u(0)=u(\pi)=0\end{cases}\tag{3.48}$$

不都是非线性波方程(3.34)的 2π 周期解吗？那么上面花了很大力气得到的解会不会退化为这个常微分方程两点边值问题的解呢？

答案是:不会的. 事实上,当 g 单调递增时. 方程(3.48)只有唯一的零解,而前面得到的却是非零解. 换句话说,定理 3.3 或 3.4 得到的是依赖于 t 的解.

注 3.5 定理 3.3 与 3.4 中关于 g 还可以作进一步的改进,例如

(1) g 可以依赖于 t, x(关于 $t-2\pi$ 周期), 其证法完全类似. 只需在一开始 § 3.2 中考察 G 可以依赖于 Q 中的变元就够了.

(2) g 关于 u 可以不必严格单调,而只设其单调就够了. 这可以通过用严格单调函数逼近单调函数得到.

(3) g 甚至可以关于 u 是不连续的.

注 3.6 半线性波方程周期解的结果最早是由 Rabinowitz 得到的,他用的是有穷维逼近结合其它环绕形式的临界点定理(参看[Ra, 3]).

注 3.7 当 g 不单调时, 前述方法不再适用. 最近 Coron [Cor2]限制在较小的空间上, 应用 Rabinowitz 原来的方法, 讨论了相应方程的非平凡解的存在性.

3.4 Hamilton 方程组的周期解

我们在第二章 § 5 曾提出过求解 Hamilton 方程组周期解的两种类型问题——给定周期 T 与给定能量 c, 并在那里就给定能量的问题进行了讨论. 现在我们来研究给定周期的问题. 不妨设 $T=2\pi$ $\left(否则作变量替换: \tau=\frac{2\pi}{T}t\right)$.

对 Hamilton 函数 H 作以下假设:

(H_1) $H\in C^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^1)$是一个严格凸的函数,满足:

$$H(\theta)=0, \quad H'(\theta)=\theta.$$

(H_2) 存在 $\theta\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$, 以及常数 M, $C>0$, 使得

$$H(z)\leqslant\theta H'(z)\cdot z,$$

以及

$$H(z)\leqslant M|z|^{\frac{1}{\theta}},$$

当 $|z|\geqslant C$.

$$(H_3)\qquad \lim_{z\to\theta}\frac{H(z)}{|z|^2}=0.$$

定理 3.5 设 Hamilton 函数 H 满足 $(H_1)\sim(H_3)$，则方程组：

$$\begin{cases}\dot{z}=JH'(z), & t\in[0,2\pi],\\ z(0)=z(2\pi)\end{cases}\tag{3.49}$$

至少有一个非零解.

证明 我们已经知道 $A=-J\dfrac{d}{dt}$ 在 $L^2(S^1,\mathbb{R}^{2n})$ 上有自伴扩张，并满足定理 3.2 中的假设 (A_1) 与 (A_2)（第一章 § 6.3）. 利用这件事和定理 3.2 立得结论.

注 3.8 类似于波方程的讨论，还可作如下修饰：

(1) Hamilton 函数 H 可以依赖于时间 t.

(2) 增涨幂次的限制可以放宽.

(3) 去掉 H 的凸性限制（参看 Rabinowitz[Ra4, 7]）.

注 3.9 定理 3.2 还包含下列非线性梁方程：

$$\begin{cases}u_{tt}+u_{xxxx}+g(u)=0, & (t,x)\in(0,2\pi)\times(0,\pi),\\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0, & t\in(0,2\pi),\\ u(0,x)=u(2\pi,x), & x\in(0,\pi).\end{cases}$$

为特殊情形，参看张恭庆、Sanchez[CS1].

注 3.10 定理 3.2 还被用来讨论球面上的非线性波方程：

$$\begin{cases}u_{tt}-\Delta_{n-1}u+g(u)=0, & (t,x)\in(0,\pi)\times S^{n-1},\\ u(0,x)=u(2\pi,x), & \forall x\in S^{n-1},\end{cases}$$

其中 Δ_{n-1} 是 S^{n-1} 上的 Laplace-Beltnami 算子. 参看张恭庆、洪崇威[CH1].

山路引理还有许多应用. 对于减弱了分离条件的山路引理（定理 2.2），可以把变分方法与上、下解结合起来，导出微分方程的许多结果，参看张恭庆[Ch2, 3].

在本书中，讨论二阶椭圆方程时，在非线性项上往往添加增涨

性条件：增涨阶 $\alpha<\frac{n+2}{n-2}$(参看 § 3.1 条件(F_1)，第二章，§ 3，例 3 (3.8) 等)．这个条件的作用是：$\alpha\leqslant\frac{n+2}{n-2}\Rightarrow$泛函的可微性，$\alpha<\frac{n+2}{n-2}\Rightarrow$泛函满足 P. S. 条件．然而有些几何问题和物理问题导出的方程对应的增涨阶正好是 $\alpha=\frac{n+2}{n-2}$ [Yamabe 问题(参看 Aubin[Au1])，Yang-Mills 场方程]，也就是说，P. S. 条件恰好不满足．这时为了应用临界点定理的一般原理，还需要更深入的分析技巧，Aubin [Au1]与 Brézis-Nirenberg [BN3] 应用最佳 Соболев 常数得到了一些有意义的结果．

§ 4 环绕的其它应用

在 § 2 中，除了山路引理外，我们还介绍过一些其它环绕的事例．在此将列举其应用．

4.1 共振问题

典型例 设 $\lim\limits_{u\to\pm\infty} g_0(u)=g_0(\pm\infty)$，$\hat{\lambda}$ 是 $-\Delta$ 在区域 Ω 上，Dirichlet-0 边值的一个本征值．问对哪些 $h(x)\in L^2(\Omega)$ 方程

$$\begin{cases}-\Delta u=\hat{\lambda}u+g_0(u)-h, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{4.1}$$

有解？

我们稍稍抽象地讨论这个问题．设 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间，$\mathscr{Y}$ 是一个 Banach 空间，并且 $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 的嵌入映射 τ 是紧的．

设 L 是 $\mathscr{X}$ 上自伴算子，它的非正谱只含有有穷个本征值，每个本征值至多是有穷重的．又设 $0\in\sigma(L)$，用 $\mathfrak{N}(L)$ 记

$$\{x\in\mathscr{X}\,|\,Lx=\theta\},$$

由此，

$$\dim\mathfrak{N}(L)<+\infty.\tag{4.2}$$

设 $g\in C^1(\mathscr{Y},\mathbb{R}^1)$，有常数 $M>0$ 使

$$\|g'(x)\|_{\mathscr{Y}^*}\leqslant M \quad \forall x\in\mathscr{Y}, \tag{4.3}$$

其中$\|\cdot\|_{\mathscr{Y}^*}$表示$\mathscr{Y}^*$中的模. 以下用$\langle\ ,\ \rangle$表示$\mathscr{X}^*$与$\mathscr{X}$或$\mathscr{Y}^*$与$\mathscr{Y}$的对偶, $(\ ,\ )$表示$\mathscr{X}$上的内积.

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{X} & \xrightarrow{\ \tau\ } & \mathscr{Y} \\ {\scriptstyle \Lambda}\big\downarrow & & \\ \mathscr{X}^* & \xleftarrow[\ \tau^*\ ]{} & \mathscr{Y}^* \end{array}$$

并用Λ: $\mathscr{X}\to\mathscr{X}^*$表示同构:

$$\langle \Lambda x, y\rangle=(x, y). \quad \forall x, y\in\mathscr{X}. \tag{4.4}$$

考察下列泛函:

$$J(u)=\frac{1}{2}(Lu, u)-g(\tau u), \quad u\in\mathscr{X}. \tag{4.5}$$

则

$$\begin{aligned}\langle J'(u), v\rangle&=(Lu, v)-\langle g'(\tau u), \tau v\rangle\\ &=\langle \Lambda Lu-\tau^*\circ g'\circ\tau u, v\rangle, \quad \forall v\in\mathscr{X},\end{aligned} \tag{4.6}$$

即

$$J'(u)=\Lambda Lu-\tau^*\circ g'\circ\tau u. \tag{4.7}$$

定理 4.1　设L满足(4.2), g满足(4.3)以及

$$g(\tau u)\to+\infty(\text{或}-\infty) \quad \text{当}\|u\|\to+\infty, u\in\mathfrak{N}(L) \tag{4.8}$$

则$J(u)$有临界点.

证明　我们仅对$g(\tau u)\to+\infty$的情形证明, 另一种情形证法完全类似.

1° 先验证J满足 P. S. 条件. 设

$$\begin{cases}|J(u_n)|\leqslant C,\\ \|J'(u_n)\|\to 0.\end{cases}$$

记$P^+=\int_{+0}^{\infty}\mathrm{d}E_\lambda$, $P^-=\int_{-\infty}^{-0}\mathrm{d}E_\lambda$ $P=E_0-E_{-0}$, 其中$L=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda$是$L$的谱分解, 按(4.6), 当$n$,

$$\begin{aligned}&|(LP^\pm u_n, P^\pm u_n)-\langle g'(\tau P^\pm u_n), \tau P^\pm u_n\rangle|\\ &\quad=|\langle J'(u_n), P^\pm u_n\rangle|\leqslant\|P^\pm u_n\|.\end{aligned} \tag{4.9}$$

但(4.9)的左边大于或等于

$$\varepsilon_{\pm}\|P^{\pm}u_n\|^2-M|\tau P^{\pm}u_n|_{\mathscr{Y}}$$
$$\geqslant\varepsilon_{\pm}\|P^{\pm}u_n\|^2-M_1\|P^{\pm}u_n\|, \tag{4.10}$$

其中 $\varepsilon_{\pm}>0$, 分别是 L 的正谱及负谱到 0 的距离, $\|\cdot\|$是 $\mathscr{X}$ 的模, $|\cdot|$是 $\mathscr{Y}$ 的模. 联合(4.9)与(4.10)得常数 $M_2>0$, 使得

$$\|P^{\pm}u_n\|\leqslant M_2, \tag{4.11}$$

再利用等式

$$J(u_n)=\frac{1}{2}[(LP^+u_n,\ P^+u_n)+(LP^-u_n,\ P^-u_n)]$$
$$-g(\tau Pu_n)-[g(\tau u_n)-g(\tau Pu_n)]$$

以及条件(4.3)

$$|g(\tau u_n)-g(\tau Pu_n)|\leqslant M|\tau(P^+u_n+P^-u_n)|$$
$$\leqslant M_3(\|P^+u_n\|+\|P^-u_n\|)\leqslant M_4,$$

推得 $g(\tau Pu_n)$有界。但按条件(4.8),这便蕴含了

$$\|Pu_n\|\leqslant M_5.$$

这样就得到:$\{u_n\}$是有界的. 由于 τ 是紧的, g' 连续. 由(4.7)可见有子列 u_{n_i}, 使得 ΛLu_{n_i} 在 $\mathscr{X}^*$ 中强收敛. 然而$(P+P^-)\mathscr{X}$是有穷维子空间, $\{u_{n_i}\}$中又有子列 u_j, 使得$(P+P^-)u_j$在$\mathscr{X}$中收敛; 于是 ΛLP^+u_j 在 $\mathscr{X}$ 中收敛. 如令 ΛL 在 $P^+\mathscr{X}$ 上是有连续逆的, 从而 $P^+u_{n_j}$ 在 $\mathscr{X}$ 中收敛, P. S. 条件得以验证.

下面应用 §2 例 2 中的环绕以及定理 2.1 证明(4.5)中的泛函 J 有临界点. 今取

$$\mathscr{X}_1=(P^-+P)\mathscr{X},\quad \mathscr{X}_2=P^+\mathscr{X},$$

则因

$$J(P^+u)\geqslant\frac{\varepsilon_+}{2}\|P^+u\|^2-(g(\tau P^+u)-g(\theta))-g(\theta)$$
$$\geqslant\frac{\varepsilon_+}{2}\|P^+u\|^2-M|\tau P^+u|-g(\theta)$$
$$\geqslant\frac{\varepsilon_+}{2}\|P^+u\|^2-M_1\|P^+u\|-g(\theta)\to+\infty$$

当$\|P^+u\|\to+\infty$,所以必有实数 β, 使得

$$J|_{\mathscr{X}_2}\geqslant\beta>-\infty$$

(因为 τ 是紧的), 而

$$J((P+P^-)u)\leqslant -\frac{\varepsilon_-}{2}\|P^-u\|^2-(g(\tau(P+P^-)u)$$
$$-g(\tau Pu))-g(\tau Pu)$$

又因为　$|g(\tau(P+P^-)u)-g(\tau Pu)|\leqslant M\|P^-u\|,$

$$g(\tau Pu)\to+\infty,\quad \text{当}\|Pu\|\to+\infty,$$

所以　$J((P+P^-)u)\to-\infty,\quad \text{当}\|(P^-+P)u\|\to+\infty.$

取 R 足够大, 使得当 $\|(P^-+P)u\|\geqslant R$ 时

$$J((P+P^-)u)<\beta-1,$$

于是当令　$S=\mathscr{X}_2,\quad Q=B_R\cap\mathscr{X}_1$

时, J 满足定理 2.1 的一切条件. 所以它有临界点.

现在来回答哪些 $h\in L^2(\Omega)$ 使方程 (4.1) 有解? 对于任意函数 $u\in L^2(\Omega)$, 记 $u_+(x)=\max(u(x),0)$, $u_-=(-u)_+$, 从而 $u=u_+-u_-$.

推论 4.1(Landesman-Lazer)　设 $\hat\lambda$ 是 $-\Delta$ 的一个本征值. g_0: $\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 是连续的有界函数, $h\in L^2(\Omega)$; 则在假设

(1)　$$\lim_{t\to\pm\infty}g_0(t)=g_0(\pm\infty),$$

(2)　$$g_0(-\infty)\int v_+-g_0(+\infty)\int v_-<\int h\cdot v$$
$$<g_0(+\infty)\int v_+-g_0(-\infty)\int v_-,\tag{4.12}$$

或者

$$g_0(+\infty)\int v_+-g_0(-\infty)\int v_-<\int h\cdot v$$
$$<g_0(-\infty)\int v_+-g_0(+\infty)\int v_-,\ \forall v\in\mathfrak{N}(-\Delta-\hat\lambda I)\tag{4.12$'$}$$

的条件下, 方程 (4.1) 有解.

在此只须取 $\mathscr{X}=H_0^1(\Omega)$, $\mathscr{Y}=L^2(\Omega)$; $L=id-\hat\lambda K$, $K=(-\Delta)^{-1}$, $g(u)=\int[G_0(u)-h(x)u]$, 其中

$$G_0(u)=\int_0^u g_0(t)\mathrm{d}t.$$

这时因为

$$\langle -\Delta u, v\rangle = \int -\Delta u\cdot v = \int \nabla u\cdot\nabla v = (u, v),$$

$\forall u, v\in H_0^1(\Omega)$,所以 $\Lambda=-\Delta$

$$\Lambda L=(-\Delta-\hat{\lambda}I),$$

而
$$\tau^*\circ g'\circ\tau u=g_0(u)-h(x).$$

所以由(4.7), J 的临界点对应着(4.1)的解, 而条件(2)则蕴含了(4.8). 这是因为

$$\frac{G_0(tv(x))}{t}\to\begin{cases}\pm g_0(\pm\infty)v_\pm(x), & 当 t\to+\infty,\\ \pm g_0(\mp\infty)v_\pm(x), & 当 t\to-\infty.\end{cases}$$

所以
$$g(tv)=\int[G_0(tv)-th\cdot v],$$

$$\frac{g(tv)}{t}\to\begin{cases}\int g_0(+\infty)v_+-\int g_0(-\infty)v_--\int h\cdot v; & 当 t\to+\infty,\\ \int g_0(-\infty)v_+-\int g_0(+\infty)v_--\int h\cdot v, & 当 t\to-\infty.\end{cases}$$

当 $v\in\mathfrak{N}(-\Delta-\hat{\lambda}I)$时, 令 $t\to\pm\infty$. (4.12)蕴含了 $g(tv)\to+\infty$; (4.12)′蕴含了 $g(tv)\to-\infty$.

注 4.1 推论 4.1 的结果当 $\hat{\lambda}=\lambda_1$ 时, 首先是由 Landesman-Lazer[LL1]于 1970 年得到的. 随后出现过许多推广性的工作. 比较系统地总结这方面的结果并附有大量文献资料的工作可参看 Brézis, H., Nirenberg, L. [BN 1]. 定理 4.1 的证法取自 P. H. Rabinowitz [Ra 6], 但比那里写得抽象、概括. 它的一些具体形式包括 Ahmad S., Lazer A. C., Paul J. L. [ALP 1]的结果以及对非线性波动方程周期解共振问题方面的结果.

注 4.2(强共振问题) Bartolo, Benci, Fortunato[BBF 1]研究了一类强共振问题. 在问题(4.1)中,设

$$h(x)\equiv 0,$$

并设 $\lim\limits_{t\to\pm\infty} g_0(t)=0$, 确切地陈述如下: 设

(1) $$tg_0(t)\to 0, \quad 当 t\to\pm\infty,$$

(2) $G_0(t)\to\beta<0$, 当 $t\to\pm\infty$,

(3) $G_0(t)\geqslant\beta$, $\forall t\in\mathbb{R}^1$

则方程(4.1)有解.

方法用到推广的(P. S.)′条件和§2例3中的环绕形式.

4.2 零点非超线性的问题

转向下列边值问题:

$$\begin{cases}-\Delta u=a(x)u+\mathbf{f}(x,u), & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{4.13}$$

其中 $\mathbf{f}(x,t)\in C^\gamma(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^1)$, $\gamma\in(0,1)$, 满足: §3 中的 (F_1), $(F_2)'$, $(F_3)'$ 以及

(F_5) $t\mathbf{f}(x,t)\geqslant 0 \quad \forall(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^1$.

又设 $a(x)>0 \quad \forall x\in\bar{\Omega}$, Hölder 连续.

比较(4.13)与(3.1), 唯一的差别表现在多了一项 $a(x)u$. 沿用§3.1的记号, 不难看出(4.13)的解就是泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\int[(\nabla u)^2-au^2]-\int F(x,u),\ u\in H_0^1(\Omega)$$

的临界点. 和定理3.1中的验证一样, J 还是满足P. S. 条件. 所不同的只是由于多了一项 $\int au^2$, J 不再满足山路引理在 $u=\theta$ 处的条件.

定理4.2 在 (F_1), $(F_2)'$, $(F_3)'$, (F_5) 以及 $a\in C^\gamma(\bar{\Omega})$, $0<\gamma<1$, $a(x)>0$ 的假设下, (4.13)有非平凡解.

证明 设

$$0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k\leqslant 1<\lambda_{k+1}\leqslant\cdots$$

是下列本征值问题的本征值:

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda a(x)u, & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

设 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_k,\cdots$ 为对应的本征向量. 今取

$$E_k=\mathrm{span}\{\phi_1,\cdots,\phi_k\},$$

有直和分解：$H_0^1(\Omega)=E_k\oplus\hat{E}$. 在 $\hat{E}$ 上，

$$\int(\nabla u)^2\geqslant\lambda_{k+1}\int au^2,$$

所以 $$J(u)\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)\int(\nabla u)^2-\int F(x,\,u(x)).$$

仿照定理 3.1 中第 2° 段的估计，不难验证：

$$\int F(x,\,u(x))=o(\|u\|^2),\quad 当\ u\to\theta(H_0^1(\Omega)).$$

由于 $1-\frac{1}{\lambda_{k+1}}>0$，所以有 $\rho>0$ 及 $\alpha>0$ 使得

$$J(u)\geqslant\alpha,\quad 当\ u\in S_\rho\cap\hat{E}. \tag{4.14}$$

在 E_k 上，由于有假设(F_5)，所以 $F(x,\,t)\geqslant0\quad\forall(x,\,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^1$，便蕴含了

$$\begin{aligned}J(u)&=\frac{1}{2}\int(\nabla u)^2-a(x)u^2-\int F(x,\,u(x))\\&\leqslant\frac{1}{2}\int(\nabla u)^2-a(x)u^2\leqslant0.\end{aligned} \tag{4.15}$$

现在在有穷维子空间 $E_{k+1}=\mathrm{span}\{\phi_1,\,\cdots,\,\phi_{k+1}\}$ 上考察泛函 $J(u)$. 由于假设$(F_2)'$可以推出

$$F(x,\,t)\geqslant C_1|t|^{\frac{1}{\theta}}+C_2,\quad C_1,\,C_2\ 是常数，当\ |t|\geqslant M.$$

所以当 $u\in E_{k+1}$ 时，

$$J(u)\leqslant(\lambda_{k+1}-1)\int au^2-C_1\int|u|^{\frac{1}{\theta}}-C_2\mathrm{mes}(\Omega)\to-\infty, \tag{4.16}$$

当$\|u\|\to\infty$，这是因为：(1)在有穷维空间上一切模等价；(2)沿每条射线 $J(u)\to-\infty$，$\left(\theta<\frac{1}{2}\right)$；(3)有穷维空间的单位球面是紧的.

按(4.16)，存在 $R>0$(取 $R>\rho$)，使得

$$J(u)\leqslant0\quad 当\ u\in\partial B_R\cap E_{k+1}. \tag{4.17}$$

取 $S=\partial B_\rho\cap\hat{E}$，$\partial Q=(B_R\cap E_k)\cup(\partial B_R\cap E_{k+1})^+$，利用定理 2.4 以及§ 2 的注 2.3 中的环绕形式．即得 J 有临界值 $C\geqslant\alpha>0$. 从而(4.13)有非平凡解.

评注与参考文献

§1. 定理1.1是Palais给出的[Pa 2,4]. 定理1.2本质上属于Palais. 定理1.3与1.4实际上包含在更一般的形变引理(第四章定理1.5)之中，这里的表达形式属于本书作者. 关于极小极大原理，最初是由Люстерник, Шнирельман提出来的[LS1]，经过许多演变，例如见Palais [Pa 4]，这里的形式是本书作者给的. 定理2.6在Hilbert空间的情形是E. Rothe [Ro 1]给出的，作者在此将其推广到Banach空间.

§2 中的环绕定义曾在Benci Rabinowitz [BR 1]中隐含地提出. 定理2.1在Hilbert空间情形，在Bartolo, Benci, Fortunato [BBF 1]中曾有提及. 定理2.2与定理2.6是作者给出的. 山路定理最早见于Ambrosetti Rabinowitz [AR 1]，例2的形式见Rabinowitz[Ra 6]，例3的形式见Benci-Rabinowitz [BR 1]，Bartolo, Benci Fortunato [BBF 1]. 环绕数的讨论见倪维明[Ni 1]. 定理2.5是由Castro [Ca 1]提出的，定理2.6的原始形式是山路引理的对偶，见于[AR 1]，但那里有些条件是多余的.

§3. 定理3.1的条件较Ambrosetti Rabinowitz [AR 1]的原来的条件略宽，但证明本质上是一样的. 3.2节的讨论是新的，其中引理3.5是刘嘉荃给出的，参看张恭庆、刘嘉荃[CL 1]. §3.3的结果最早由Rabinowitz [Ra 3]得到，Brézis, Coron, Nirenberg [BCN 1]给出简化的证明，张恭庆、李树杰、董光昌[CLD 1]又给出另一个证明. 我们在这里利用§3.2中的一般结果推出这个定理. §3.4的结果，在更一般的形式下，由Rabinowitz [Ra 4, 7]得到，在那里Hamilton函数不必要求是凸的. 这里的简化证明是Ekland [Ek2]给出的.

§4. 例1参看Rabinowitz [Ra 6]，这里抽象的形式看张恭庆[Ch 4]. 例2参看Rabinowitz [Ra 5]与倪维明[Ni 1].

第四章 畴数与指标

流形上的或有某种对称性的泛函有较为丰富的临界点理论。除了第三章提到的环绕概念而外，还可以利用与这流形或与这作用群(与对称性相联系的作用群)相关的代数拓扑不变量来确定泛函的临界值，从而估计临界点的个数．其中畴数概念和关于作用群不变的指标都是这些不变量．

本章的中心定理是 Люстерник-Шнирельман 重数定理(定理1.4, 2.2, 3.3)．它不但从极小极大原理产生出临界值，而且借助于前面提到的不变量进一步刻划出对应于这个临界值的临界点集的大小．

§1 介绍畴数概念，并导出相应的 Л. Ш. 重数定理．为了在 Finsler 流形上导出畴数的一条重要性质——连续性，我们引进绝对邻域收缩、同伦扩张性质等概念，并讨论了具备这些性质的一些重要的空间．为了在 Finsler 流形上讨论临界点，我们把第三章的形变定理进一步推广与加强．定理1.5就是所要的形变引理．当然，为了在流形上建立形变引理，我们还要把伪梯度向量场的概念推广到流形上去．

§2 是一般的指标理论，中心定理是定理2.2．平行于第三章的讨论，我们又引进伪指标的概念．定理2.3是定理2.2的推广，也是形式更一般的 Л. Ш. 定理，在应用中常要遇到．引理2.5以及定理2.5建立泛函的渐近行为与指标之间的关系，是很有用

的.

对于 $\mathbb{Z}_2$ 群，对应的指标称为亏格. 在 §3 中我们引进了它的定义. 对于偶泛函，有一个对称形式的山路定理(定理 3.6 及其推论)，它实际上是定理 3.3(对称的 Л. Ш. 重数定理)与伪指标理论结合的直接推论. 在许多微分方程问题中，它给出无穷多个解存在性的判别方法.

在 §4 中引进对应于 S^1 群的指标. 为了估算这个指标，我们需要一个 S^1 群的 Borsuk 定理(定理 4.3)，为了不涉及太多的代数拓扑知识，我们采用 Brouwer 度的方法. 这在 §4 中占据了相当的篇幅. 作为 S^1 指标对微分方程的应用的例子，我们讨论了 Hamilton 组在等量面上的周期轨道的个数，Ekeland Lasry 定理(定理 4.4)是这方面的一个非常精彩的结果.

§1 畴数理论

为了估计临界点的个数，Люстерник-Шнирельман 引进了畴数的概念，这是一个拓扑不变量，利用它可以估算流形上泛函临界点的个数的下界. 它在研究紧流形上闭测地线的个数问题中起过重要的作用.

1.1 畴数(category)

定义 1.1 设 M 是一个拓扑空间，A 是 M 的闭子集. 令 $\mathrm{cat}(A)=\inf\left\{m\in\mathbb{Z}_+\cup\{+\infty\}\mid\exists m\text{ 个可收缩闭集 }F_1,\ \cdots,\ F_m\text{ 使得 }A\subset\bigcup_{i=1}^m F_i\right\}$. 其中 $\mathbb{Z}_+$ 是非负整数集，我们称 $\mathrm{cat}(A)$ 为 A 的畴数.

这里，集合 F 称为是可收缩的，是指在 M 上，它可以形变到一点，即，F 上的恒同映射 id_F 在 M 上同伦于常值映射.

为了强调出畴数的定义不仅依赖于集合 A，而且也依赖于拓扑空间 M 本身，所以有时也记作 $\mathrm{cat}(M,\ A)$.

例 1 $\mathrm{cat}(\mathscr{X};\mathscr{X})=1$，当 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间.

这是因为 $\mathscr{X}$ 在自身内是可收缩的：作同伦 $\varphi:[0,1]\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 如下：$\varphi(t,x)=(1-t)x$.

例 2 对于 n 维球面，有 $\mathrm{cat}(S^n,S^n)=2$.

不妨设 S^n 是单位球面. 首先，证 S^n 在自身内是不可收缩的. 倘若不然，$\exists\varphi:[0,1]\times S^n\to S^n$，使得 $\varphi(0,\cdot)=id$，而 $\varphi(1,\cdot)=x_0\in S^n$. 作

$$A(x)=\begin{cases}-x_0, & \text{当 } x=0,\\ -\varphi\left(1-\|x\|,\dfrac{x}{\|x\|}\right), & \text{当 } x\in B^{n+1}\backslash\theta,\end{cases}$$

其中 B^{n+1} 是 $n+1$ 维单位球，使 $\partial B^{n+1}=S^n$，则 $A:B^{n+1}\to S^n$ 是连续的. 由 Brouwer 不动点定理，有不动点 $\hat{x}\in B^{n+1}$，按定义，$\hat{x}\in S^n$，从而 $\hat{x}=A\hat{x}_0=-\hat{x}_0$. 这蕴含了 $\hat{x}=\theta$，这与 $\hat{x}\in S^n$ 矛盾. 所以 S^n 在自身不可收缩. 也就是有

$$\mathrm{cat}(S^n,S^n)>1.$$

其次将 S^n 分为两片 $S^n_\pm=\{(x',x_{n+1})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^1\mid\|x'\|^2+x^2_{n+1}=1,\ x_{n+1}\gtreqless0\}$，作同伦：

$$\varphi_t:\ x=(x',x_{n+1})\mapsto\begin{cases}\left(\sqrt{\dfrac{1-[(1-t)x_{n+1}+t]^2}{1-x^2_{n+1}}}\,x',\ (1-t)x_{n+1}+t\,\mathrm{sgn}\,x_{n+1}\right), & x_{n+1}\neq\pm1,\\ (0,\pm1), & x_{n+1}=\pm1,\end{cases}$$

则 $\varphi_t:S^n_\pm\to S^n_\pm$ 二元连续，并且 $\varphi_1(x)=(0,\pm1)$，$\forall x\in S^n_\pm$；所以又有 $\mathrm{cat}(S^n,S^n)\leqslant2$.

按定义，畴数有下列基本性质：

1° $\mathrm{cat}(A)=0\Leftrightarrow A=\emptyset$；

2° （单调性）$A\subset B\Rightarrow\mathrm{cat}(A)\leqslant\mathrm{cat}(B)$；

3° （次可加性）$\mathrm{cat}(A\cup B)\leqslant\mathrm{cat}(A)+\mathrm{cat}(B)$；

4° （规范性）$\mathrm{cat}(\{p\})=1$，$\forall p\in M$.

还有

5° (形变不减性)设有 φ: $[0, 1]\times M\xrightarrow{C} M$, 使得 $\varphi(0, \cdot)=id$, $\varphi(1, \cdot)=h$, 则有

$$\mathrm{cat}(A)\leqslant\mathrm{cat}(h(A)); \quad \forall \text{闭子集 } A.$$

证明 设 $B=h(A)$, $\mathrm{cat}(B)=m$; 即有 $F_1, \cdots, F_m$, 都是 M 中的可收缩闭集, 满足: $B\subset\bigcup_{i=1}^{m} F_i$, 令

$$G_i=\varphi^{-1}(1, F_i)=h^{-1}(F_i) \quad i=1, \cdots, m;$$

则 G_i 是闭的, 还是可收缩的. ($\varphi(t, \cdot)$: $G_i\to F_i$, 而 F_i 可收缩, 即有 ψ: $[0, 1]\times M\xrightarrow{C} M$, $\psi(0, \cdot)=id$, $\psi(1, \cdot)$是常值的. 连接 φ 与 ψ, 得 G_i 是可收缩的). 并且 $A\subset\bigcup_{i=1}^{m} G_i$. 所以有

$$\mathrm{cat}(A)\leqslant m=\mathrm{cat}(B).$$

最后, 还要证明

6° (连续性)设 A 是 M 的一个紧子集, 则必有 A 的一个闭邻域 N, 使得 $A\subset\mathrm{int}(N)\subset N$, 使得

$$\mathrm{cat}(A)=\mathrm{cat}(N).$$

为了证明这个性质, 我们需要

引理 1.1 设 X, Y 是可度量化的 Banach 流形, $A\subset X$ 是一个闭子集; 则对任意连续映射 ϕ: $(X\times\{0\})\cup(A\times[0,1])\to Y$, 有连续扩张 $\tilde{\phi}$: $X\times[0, 1]\to Y$.

我们把它的证明放到下一段去. 先作

性质 6°(连续性)的证明. 设 A 是 M 中的紧子集, 不妨设 $\mathrm{cat}(A)<\infty$, 例如说 m. 于是有可收缩的闭集 $F_1, \cdots, F_m$ 使得 $A\subset\bigcup_{i=1}^{m} F_i$. 对每个 F_i 应用引理 1.1, $i=1, 2, \cdots, m$. 因为每个 F_i 都是可收缩的, 这表明有 φ_i: $F_i\times I\to M$ 满足: $\varphi_i(, 0)=id$, $\varphi_i(, 1)=p_i\in M$; 于是有扩张: $\tilde{\varphi}_i$: $M\times I\to M$, 满足: $\tilde{\varphi}_i|_{M\times\{0\}\cup(F_i\times I)}=\varphi_i|_{M\times\{0\}\cup(F_i\times I)}$, $i=1, \cdots, m$. 取 V_i 为 p_i 的一个可收缩的闭邻域, 则 $U_i=\tilde{\varphi}_i^{-1}(V_i, 1)$是闭的, 而且是可收缩的(因为 $V_i=\tilde{\varphi}_i^{-1}(V_i, 0)$ 是可收缩的), 从而 $U=\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ 是 A 的一个闭邻域, 即得 $m=\mathrm{cat}(A)$

$\leqslant \mathrm{cat}(U) \leqslant m$.

总结起来，有

定理 1.1(Palais) 设 M 是一个可度量化的 Banach 流形，则畴数 cat 具有单调性、次可加性、规范性、形变不减性以及连续性。此外有：

7° 若 $\mathrm{cat}(A)=m$，则 A 中至少含有 m 个不同的点。

8° 若 A 是紧子集，则 $\mathrm{cat}(A)<+\infty$。

证明 性质 1°～6° 已证，兹证：

7° 由规范性、次可加性与反证法立得。

8° 由连续性及规范性再证，$\forall p \in A$，$\exists$ 它的一个闭邻域 U_p 使得 $p \in \mathrm{int}(U_p) \subset U_p$，且 $\mathrm{cat}(U_p)=1$。再用有穷覆盖，以及次可加性和单调性，得

$$\mathrm{cat}(A) \leqslant \mathrm{cat}\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{p_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mathrm{cat}(U_{p_i}) = m.$$

1.2 绝对邻域收缩核与连续映射的扩张性质

在上一段，我们留下引理 1.1 没有证明。它涉及到在给定闭子集上的连续映射是否可以延拓到全空间去的问题。在这个方向上，最原始的结果是 Tietze 定理：度量空间闭子集上的连续函数，可以扩张到全空间。Tietze 定理的推广有下列

定理 1.2(Dugundji) 设 A 是度量空间 (X, ρ) 中的一个闭子集，Y 是一个线性赋范空间，又设 $\phi: A \to Y$ 连续；则必存在 $\tilde{\phi}: X \to co(\phi(A))$ 连续，满足：$\tilde{\phi}|_A=\phi$，其中 $co(\phi(A))$ 表示 $\phi(A)$ 的凸包。

证明 1° $\forall x \in X \backslash A$，取开球 V_x，$\mathrm{diam}(V_x) \leqslant \rho(V_x, A)$，则 $\{V_x\}$ 是 $X \backslash A$ 的一个开覆盖。于是有局部有限加细覆盖，记作 $\{U_\tau, \tau \in \Lambda\}$。对任意 $\tau \in \Lambda$ 及 $x \in X \backslash A$，令

$$\lambda_\tau(x) = \frac{\rho(x, X \backslash U_\tau)}{\sum_{\tau' \in \Lambda} \rho(x, X \backslash U_{\tau'})},$$

则 $0 \leqslant \lambda_\tau(x) \leqslant 1$，并且 $\lambda_\tau(x)>0 \Leftrightarrow x \in U_\tau$。$\lambda_\tau$ 在 $X \backslash A$ 上是连续

的．令

$$\tilde{\phi}(x)=\begin{cases}\phi(x), & x\in A,\\ \sum\limits_{\tau\in A}\lambda_\tau(x)\phi(a_\tau), & x\in X\setminus A,\end{cases}$$

其中 $a_\tau\in A$，按下列方式选定

$$\rho(a_\tau, U_\tau)<2\rho(A, U_\tau).$$

因为 $\forall x\in X\setminus A$，至多只有有穷个 τ 使得 $\lambda_\tau(x)\neq 0$，又因为 $\sum\limits_{\tau\in A}\lambda_\tau(x)=1$，以及 $\phi(a_\tau)\in\phi(A)$，所以 $\tilde{\phi}(x)\in co(\phi(A))$，并且无论在 $\mathrm{int}(A)$ 还是在 $X\setminus A$ 都是连续的．

2° 验证 $\tilde{\phi}$ 在 ∂A 上连续．设 $x_0\in\partial A$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\alpha>0$ 使得

$$\rho(x_0, a)<\alpha,\ a\in A\Rightarrow\|\phi(x_0)-\phi(a)\|<\varepsilon.$$

取 $\mathscr{O}=\left\{x\in X\,|\,\rho(x_0, x)<\dfrac{\alpha}{6}\right\}$，要证：$\forall x\in\mathscr{O}$，

$$\|\tilde{\phi}(x)-\tilde{\phi}(x_0)\|<\varepsilon.$$

$\forall x\in\mathscr{O}\cap(X\setminus A)$，分两种情形：

(1) $\rho(x, a_\tau)<\dfrac{\alpha}{2}$．这时

$$\rho(x_0, a_\tau)<\rho(x_0, x)+\rho(x, a_\tau)<\alpha,$$

所以有

$$\|\phi(x_0)-\phi(a_\tau)\|<\varepsilon.$$

(2) $\rho(x, a_\tau)\geqslant\dfrac{\alpha}{2}$．这时

$$\rho(x, a_\tau)\geqslant 3\rho(x, x_0)\geqslant 3\rho(x, A),$$

于是有 $x\notin U_\tau$．这是因为，如果 $x\in U_\tau$，那么

$$\begin{aligned}\rho(x, a_\tau)&\leqslant\rho(a_\tau, U_\tau)+\mathrm{diam}(U_\tau)\\&<2\rho(A, U_\tau)+\rho(A, U_\tau)\\&=3\rho(A, U_\tau)\leqslant 3\rho(x, A),\end{aligned}$$

这便是一个矛盾．

这时 $\lambda_\tau(x)=0$．

联合这两种情形，得到

$$\begin{aligned}\|\tilde{\phi}(x_0)-\tilde{\phi}(x)\|&=\Big\|\sum_{\tau\in A}\lambda_\tau(x)(\phi(x_0)-\phi(a_\tau))\Big\|\\&\leqslant\varepsilon\sum\lambda_\tau(x)=\varepsilon,\end{aligned}$$

至此定理得证.

还要研究更一般的映射的连续扩张性质, 例如说, 在定理 1.2 中, 把线性赋范空间 Y 换成一个度量空间, 或一个可度量化的流形——这正是引理 1.1 中所要的. 我们需要:

定义 1.2 设 M 是一个度量空间, 称 M 是一个绝对收缩核 (AR)(absolute retract), 是指对于任意给定的度量空间 N 和它的任意一个闭子集 A, 以及任意一个连续映射 $\phi: A\to M$, 都有一个连续扩张 $\tilde{\phi}: N\to M$, $\tilde{\phi}|_A=\phi$. 称 M 是一个绝对邻域收缩核 (ANR)(absolute neighborhood retract), 是指对上述 A, N 及 ϕ 有 A 在 N 中的一个邻域 U 和连续扩张 $\tilde{\phi}: U\to M$ 使得 $\tilde{\phi}|_A=\phi$.

空间 M 称为是一个局部 AR(或局部 ANR), 是指: $\forall p\in M$, 有一个 M 中的 p 邻域 V, 使得 V 是一个 AR(或 ANR).

从 Dugundji 定理立即可见: 每个线性赋范空间中的凸子集, 必是一个 AR. 从而一个 Banach 流形必是一个局部 AR.

定义 1.3 设 X, Y 是两个拓扑空间, A 是 X 的一个闭子集, 称 A 在 X 中关于 Y 具有同伦扩张性质, 如果任意连续映射 $\phi: (X\times\{0\})\cup(A\times[0, 1])\to Y$ 可以连续地扩张为 $X\times[0, 1]\to Y$ 的映射 $\tilde{\phi}$.

为了证明引理 1.1, 我们需要下列引理.

以下记 $I=[0, 1]$.

引理 1.2 设 X 是一个度量空间, A 是它的任意一个闭子集, Y 是一个 ANR; 则 A 在 X 中关于 Y 具有同伦扩张性质.

证明 取 $N=X\times I$, $T=X\times\{0\}\cup A\times I$, 设 $\phi: T\to Y$ 连续. 由假设, 有 T 的一个邻域 U, 以及 ϕ 的一个连续扩张 $\tilde{\phi}$, 使得 $\tilde{\phi}: U\to Y$. 又因为 I 是紧的, 有 A 在 X 中的邻域 V, 使得 $V\times I\subset U$, 选取 $\psi: X\to I$, 其支集 $\operatorname{supp}\psi\subset V$, 且 $\psi|_A=1$, 并令:

$$H(x, t)=\tilde{\phi}(x, \psi(x)t),$$

则 $H: X\times I\to Y$, 并且 $H|_T=\phi$.

所以为证引理 1.1, 只需再证.

引理 1.3 设 Y 是一个可度量化的 Banach 流形, 则 Y 必是

一个 ANR.

为此需要先讨论 ANR 的一些基本性质.

(1) ANR 的开子集是 ANR.

证明 设 $\mathscr{O}$ 是 ANR Y 的一个开子集, (X, A) 是一个度量空间和它的闭子集, $\phi: A\to\mathscr{O}$, 将证有 A 的邻域 U 及 ϕ 的连续扩张 $\tilde{\phi}: U\to\mathscr{O}$.

因为 Y 是 ANR, ϕ 有关于 Y 的邻域扩张 $\phi_1: V\to Y$, 其中 V 是 A 的一个邻域. 因为 $\mathscr{O}$ 是开的, 所以 $\phi_1^{-1}(\mathscr{O})=U$ 在 V 中是开的, 并且 $A\subset U$, 所以 U 还是 A 在 X 中的一个邻域. 令

$$\tilde{\phi}: U\to\mathscr{O}, \quad \tilde{\phi}=\phi_1|_U,$$

则 $\tilde{\phi}$ 即为所求.

(2) 设 $X=X_1\cup X_2$, 其中 X_1, X_2 都是一个度量空间中的开子集, 并且是 ANR; 则 X 是 ANR.

证明 设 (Y, B) 是一个度量空间和它的闭子集, $\phi: B\to X$ 连续, 将证 ϕ 有一个邻域扩张. 令

$$F_1=B\setminus\phi^{-1}(X_2), \; F_2=B\setminus\phi^{-1}(X_1),$$

则 $F_1\cap F_2=\emptyset$, 且都是闭于 B 的, 从而也闭于 Y. 于是有 Y 中的不相交的开集 Y_1, Y_2 使得 $Y_i\supset F_i, i=1, 2$. 于是 $Y_0=Y\setminus(Y_1\cup Y_2)$ 在 Y 中是闭的. 令 $B_i=Y_i\cap B$, $i=0, 1, 2$, 便有

$$\phi(B_0)\subset X_1\cap X_2, \tag{1.1}$$

$$\phi(B_i)\subset X_i, \quad i=1, 2.$$

B_0 在 Y_0 中是闭的. 而由(1), $X_1\cap X_2$ 是 ANR, 所以(1.1)表明 $\phi|_{B_0}$ 有一个从 Y_0 中的 B_0 的开邻域 U_0 到 $X_1\cap X_2$ 的扩张. 这个扩张定义在 U_0 上, 而原来的映射 ϕ 定义在 B 上, 它与这扩张在 $B_0=U_0\cap B$ 上相合. 所以拼起来定义了一个映射 $\psi: U_0\cup B\to X$. 因为

$$U_0=(U_0\cup B)\cap Y_0,$$

U_0 在 $U_0\cup B$ 中是闭的; B 在 Y 中闭, 从而在 $U_0\cup B$ 中也是闭的, 所以 ψ 是连续的.

我们有

$$\psi(U_0\cup B_i)\subset X_i,\quad i=1,2, \tag{1.2}$$

$$Y_0\backslash U_0\text{ 在 }Y\text{ 是闭的.} \tag{1.3}$$

集合 $U_0\cup B_1$ 在 $U_0\cup Y_1$ 中是闭的. 因为

$$(U_0\cup Y_1)\backslash(U_0\cup B_1)=Y_1\backslash B_1=Y_1\backslash B$$

在 Y 中开. 又因为 X_1 是一个 ANR, 所以按(1.2), $\psi|_{U_0\cup B_1}$ 有一个从 $U_0\cup Y_1$ 中的 $U_0\cup B_1$ 的一个开邻域 U_1 到 X_1 的扩张 ψ_1: $U_1\to X_1$. 按(1.3), $U_0\cup Y_1$ 在 $Y_0\cup Y_1$ 中是开的, 所以

$$U_1\text{ 在 }Y_0\cup Y_1\text{ 中是开的.} \tag{1.4}$$

类似地, 令 ψ_2: $U_2\to X_2$ 是 $\psi|_{U_0\cup B_2}$ 的一个从 $U_0\cup Y_2$ 中的 $U_0\cup B_2$ 的一个开邻域 U_2 到 X_2 的扩张. 按(1.3), $U_0\cup Y_2$ 在 $Y_0\cup Y_2$ 中还是开的, 所以

$$U_2\text{ 在 }Y_0\cup Y_2\text{ 中也是开的.} \tag{1.5}$$

令 $U=U_1\cup U_2$, 并令 $\tilde{\phi}$: $U\to X$ 如下:

$$\tilde{\phi}(x)=\begin{cases}\psi_1(x), & \text{当 } x\in U_1\\ \psi_2(x), & \text{当 } x\in U_2.\end{cases}$$

对 $x\in U_0=U_1\cap U_2$, 我们有 $\psi_1(x)=\psi_2(x)=\psi(x)$, 因此 $\tilde{\phi}$ 是唯一确定的. 我们有

$$U_1=U\backslash Y_2,\quad U_2=U\backslash Y_1,$$

所以 U_1 与 U_2 在它们的并集 U 中是闭的. 因此 $\tilde{\phi}$ 是连续的. $\tilde{\phi}$ 是 ϕ 的一个扩张. 剩下只需证明 U 是 B 在 Y 中的一个邻域.

事实上, U 在 Y 中是开的. 这是因为由(1.4)与(1.5),

$$Y\backslash U=[(Y_0\cup Y_1)\backslash U_1]\cup[(Y_0\cup Y_2)\backslash U_2]$$

是闭的.

(3) 设 X_n 都是一个度量空间中的开子集, 并且是 ANR, $n=1, 2, \cdots$; 则 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ 是 ANR.

证明 1° 先设 $X_n\cap X_m=\emptyset$, 当 $n\neq m$. 按 Arens-Eells 定理 [DG1, p. 158], X 可以等距地嵌入一个线性赋范空间 Z, 成为 Z 的一个闭子集. 每个 X_n 作为 X 中的开子集的余集, 相对于 X 闭, 从而在 Z 中也是闭的. 于是在 Z 中存在一族互不相交的开集

$\{G_n\}$，使得 $X_n\subset G_n$. 因为 X_n 既是 ANR，又是 G_n 的一个闭子集它便是 G_n 中的某个开集 H_n 的一个收缩核，即有收缩 r_n: $H_n\to X_n$. 定义 r: $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\to X$ 为 $r(z)=r_n(z)$ 当 $z\in H_n$，则 r 是 X 的一个开邻域 $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ 到 X 的收缩. 按 Dugundji 定理，Z 是 AR. 若 (Y, B) 满足 ϕ: $B\to X$，便有 $\hat{\phi}$: $Y\to X$ 使 $\hat{\phi}|_B=\phi$. 定义 $\tilde{\phi}=r\circ\hat{\phi}$，以及 $V=\hat{\phi}^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right)$，就得到 $\tilde{\phi}$: $V\to X$ 适合 $\tilde{\phi}|_B=\tilde{\phi}$, 1° 得证.

2° 再看一般情形. 令 $U_n=\bigcup_{i=1}^{n} X_i$，则按性质(2)，$U_n$ 是开的 ANR. 此外有：$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n\subset U_{n+1}$. 令

$$V_n=\left\{x\in U_n \mid \operatorname{dist}(x, X\setminus U_n)>\frac{1}{n}\right\},$$

则 V_n 在 X 中开，$V_n\subset U_n$，从而 V_n 又是 ANR；且有

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n, \tag{1.6}$$

$$\bar{V}_n\subset V_{n+1}. \tag{1.7}$$

再定义 W_n 如下：

$$W_1=V_1,\ W_2=V_2,\ W_n=V_n\setminus\bar{V}_{n-2},\quad 当\ n\geqslant 3, \tag{1.8}$$

则每个 W_n 在 X 中开，$W_n\subset V_n$，从而 W_n 是 ANR. 由(1.7)与(1.8)得到：$W_n\supset V_n\setminus V_{n-1}$；所以(1.6)蕴含了

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} W_{2n-1}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty} W_{2n},$$

但 $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_{2n-1}$ 与 $\bigcup_{n=1}^{\infty} W_{2n}$ 都是互不相交的开 ANR 之并集，按 1° 的结论，它们都是 ANR，再按性质(2)，X 是 ANR.

(4) 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族 ANR 并是开集，且有 $X_\alpha\cap X_{\alpha'}=\emptyset$ 当 $\alpha\neq\alpha'$；则 $X=\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ 是 ANR.

证明与性质 3 的第 1° 段证明一样，实际上那里没有必要限制

指标集是可列的.

为证引理1.3,还要

引理1.4　设$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是仿紧空间$X$的一个开覆盖;则存在着一组局部有限的加细开覆盖$\{G_{i\beta}\}$ $\beta\in B_i$, $i=0, 1, 2, \cdots$,使得:$G_{i\beta}\cap G_{i\beta'}=\emptyset$当$\beta\neq\beta'$.

证明　由仿紧性,一开始不妨设$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$就是局部有限的.令$B_i$表$\Lambda$的$i+1$个指标组$\beta=(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_i)$构成的集合.设$\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为对应于$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的一组单位分解,$\varphi_\alpha$的支集$\operatorname{supp}\varphi_\alpha\subset U_\alpha$.对于$\beta\in B_i$,令

$$G_{i\beta}=\{x\in X\,|\,\varphi_\alpha(x)>0\text{ 当 }\alpha\in\beta\text{ 且 }\varphi_\gamma(x)<\varphi_\alpha(x)\text{ 当 }\alpha\in\beta,\ \gamma\notin\beta\},$$

$\forall x\in X$,在它的邻近,只有有穷多个φ_α不为0,所以$G_{i\beta}$是开的.显然有:$G_{i\beta}\cap G_{i\beta'}=\emptyset$当$\beta\neq\beta'$.

因为$G_{i\beta}\subseteq\bigcap\limits_{\alpha\in\beta}U_\alpha$,所以$\{G_{i\beta}\}$是$\{U_\alpha\}$的一个加细.$\forall x_0\in X$,设$\alpha_0, \cdots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_m$是这样一个指标集,使得

$$\varphi_{\alpha_0}(x_0)=\cdots=\varphi_{\alpha_i}(x_0)>\varphi_{\alpha_{i+1}}(x_0)\geqslant\cdots\geqslant\varphi_{\alpha_m}(x_0)\geqslant 0,$$

则$x_0\in G_{i(\alpha_0,\cdots,\alpha_i)}$,故$\{G_{i\beta}\}$覆盖了$X$.

最后,若$\mathscr{O}$是x_0的一个邻域,使得$\{\alpha\in\Lambda\,|\,U_\alpha\cap\mathscr{O}\neq\emptyset\}$是$\Lambda$的一个有穷子集$\Lambda'$,则$G_{i\beta}\cap\mathscr{O}=\emptyset$除非$\beta\subseteq\Lambda'$.而只有有穷多个这样的$\beta$,所以$\{G_{i\beta}\}$是局部有限的.

引理1.3的证明　设$\{U_\alpha\}$是Y的一个开覆盖,并且每个U_α是一个ANR.由Dugundji定理,这是可以作到的.按引理1.4,有一个局部有限加细开覆盖$\{G_{i\beta}\}_{\beta\in B_i}$, $i=0, 1, 2, \cdots$满足:$G_{i\beta}\cap G_{i\beta'}=\emptyset$当$\beta\neq\beta'$.按性质1,每个$G_{i\beta}$是一个ANR.按性质4,$G_i=\dot{\bigcup\limits_{\beta\in B_i}}G_{i\beta}$是ANR.如今$X=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}G_i$,再由性质3,它还是一个ANR.引理1.3证完.

引理1.1的证明　联合引理1.2与1.3立得.

我们再指出一个有趣而重要的结论:

定理1.3　设S_1是无穷维线性赋范空间中的单位球面,则

S_1 是一个 AR.

它的一个直接推论是下列令人惊异的事实:

推论 1.1 无穷维线性赋范空间中的单位球面是可收缩的!

证明 在度量空间 $S_1\times I$ 上. 考察闭子集 $A=S_1\times\{0\}\cup S_1\times\{1\}$. 令

$$\phi(t,x)=\begin{cases}x, & t=0,\\ \rho\in S_1, & t=1.\end{cases}$$

则 ϕ 在 A 上连续, 且 $\phi: A\to S_1$. 按定理 1.3, S_1 是一个 AR, 便有 $\tilde\phi: S_1\times I\xrightarrow{\text{连续}} S_1$, $\tilde\phi|_A=\phi$. 这便推出 S_1 是可收缩的.

因此有 $\operatorname{cat}(S_1, S_1)=1$. 当 $\dim(S_1)=\infty$.

我们不准备证明定理 1.3 了, 但将在可分 Hilbert 空间情形, 即(在同构意义下) l^2 空间, 直接构造出单位球面的收缩.

设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in l^2$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<+\infty$. 记 T 为推移算子:

$$T: x\mapsto(0, x_1, x_2, \cdots),$$

取定 $e=(1, 0, 0, \cdots)$. 作同伦形变:

$$\varphi_{(t,x)}=\begin{cases}\sqrt{1-(2t)^2}\,e+2tTx, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2},\\[2ex] \dfrac{2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)x+\sqrt{1-(2t-1)^2}\,Tx}{\|(2t-1)x+\sqrt{1-(2t-1)^2}\,Tx\|}, & \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

因为上式分母的平方等于

$$2(2t-1)\sqrt{1-(2t-1)^2}\operatorname{Re}(x, T_x)+\|x\|^2\neq 0,\quad 当\ x\in S_1.$$

所以 φ 二元连续, 并且 $\varphi(0, x)=e$, $\varphi(1, x)=x$.

1.3 Люстерник-Шнирельман 畴数定理

引入畴数是要把这个拓扑不变量结合上极小极大原理(第三章§1), 对泛函 $\mathbf{f}$ 的临界点的个数给出估计.

不难把第二章的概念和结论扩充到一个 C^{2-0} Finsler 流形 M 上. 设 $\mathbf{f}\in C^1(M, \mathbb{R}^1)$, 称 $p\in M$ 是一个临界点, 是指 $d\mathbf{f}(p)=\theta$, 称

$K=\{p\in M\,|\,d\mathbf{f}(p)=\theta\}$为临界集. 类似地定义正则值、正则点和临界值. 同样记 $K_c=K\cap\mathbf{f}^{-1}(c)$, $c\in\mathbb{R}^1$; 称 $\mathbf{f}_c=\{p\in M\,|\,\mathbf{f}(p)\leqslant c\}$ 为水平集.

利用畴数 $\mathrm{cat}(M,\ A)$, 我们可以产生一列集族:

$\mathscr{F}_k=\{A\in\Sigma^*\,|\,\mathrm{cat}(A)\geqslant k\}$, $k=1,\ 2,\ \cdots$, Σ^* 是 M 上的闭集全体. 因为 cat 具有形变不减性, 所以 $\mathscr{F}_k$ 关于 Φ^t(参看第三章 § 1)是不变的. 它蕴含了, 只要

$$c_k=\inf_{A\in\mathscr{F}_k}\sup_{x\in A}\mathbf{f}(x),\quad k=1,\ 2,\ \cdots$$

是有穷的, 那么由第三章定理只要 $\mathbf{f}$ 具有形变性质, c_k 就是 $\mathbf{f}$ 的临界值. 按定义 $\mathscr{F}_{k+1}\subset\mathscr{F}_k$, 所以 $c_k\leqslant c_{k+1}$, $k=1,\ 2,\ \cdots$.

虽然有一列集族 $\mathscr{F}_k$ 对应着一列临界值 c_k, 我们还是不能得出有无穷多个临界点的结论. 因为:

(1) 当 k 超过一定数后, 很可能 $\mathscr{F}_k=\emptyset$. 例如 M 是可收缩的, 那么当 $k>1$ 时, $\mathscr{F}_k=\emptyset$, 因此它并不提供更多的临界值.

(2) 即使 $\mathscr{F}_{k+1}\neq\emptyset$, 也不能保证 $c_{k+1}>c_k$.

对于后者在加强了形变引理以后, 有下列

定理 1.4(Люстерник-Шнирельман 重数定理) 设 M 是一个 C^{2-0} Finsler 流形, $\mathbf{f}\in C^1(M,\ \mathbb{R}^1)$满足 P. S. 条件; 则当

$$-\infty<c=c_{m+1}=c_{m+2}=\cdots=c_{k+m}<+\infty$$

时, $\mathbf{f}$ 至少有 k 个不同的临界点属于 K_c.

作为这个定理的直接推论, 可以得出只要 $-\infty<c_1\leqslant\cdots\leqslant c_k<+\infty$, $\mathbf{f}$ 就至少有 k 个不同的临界点.

加强的形变引理是

定理 1.5 设 M 是一个 C^{2-0} 的 Finsler 流形, $\mathbf{f}\in C^1(M,\mathbb{R}^1)$ 满足 P. S. 条件, $\forall c\in\mathbb{R}^1$, N 是 K_c 的一个闭邻域, 则必有一个连续的 η: $[0,\ 1]\times M\to M$, $\exists\bar{\varepsilon}>\varepsilon>0$ 使得

(1) $\eta(t,\ \cdot)|_{C\mathbf{f}^{-1}[c-\bar{\varepsilon},c+\bar{\varepsilon}]}=id|_{C\mathbf{f}^{-1}[c-\bar{\varepsilon},c+\bar{\varepsilon}]}$,

(2) $\eta(0,\ \cdot)=id$,

(3) $\eta(1,\ \mathbf{f}_{c+\varepsilon}\backslash\mathring{N})\subset\mathbf{f}_{c-\varepsilon}$,

(4) $\eta(t,\cdot)M\to M$ 是同胚, $\forall t\in[0,1]$.

我们先承认这个定理，把它的证明留到后面去. 因为正如在第三章§1我们所做的那样，在证明这定理之前有许多准备工作要做：引入伪梯度向量场，选下降流.

定理1.4的证明 我们只要证明：

$$\mathrm{cat}(K_c)\geqslant k$$

就够了. 由P.S.条件，K_c是紧的，由畴数的连续性，有K_c的一个闭邻域N使得

$$\mathrm{cat}(K_c)=\mathrm{cat}(N).$$

按c的定义，$\forall\varepsilon>0$, $\exists F_\varepsilon\subset \mathbf{f}_{c+\varepsilon}$满足：

$$\mathrm{cat}(F_\varepsilon)\geqslant k+m.$$

但由形变定理1.5，又有$\eta=\eta(1,\cdot)$使得

$$\eta(F_\varepsilon\backslash\mathring{N})\subset\eta(\mathbf{f}_{c+\varepsilon}\backslash\mathring{N})\subset\mathbf{f}_{c-\varepsilon},$$

于是有：

$$\begin{aligned}k+m&\leqslant\mathrm{cat}(F_\varepsilon)\leqslant\mathrm{cat}(F_\varepsilon\backslash\mathring{N})+\mathrm{cat}(N) &&\text{(次可加性)}\\&\leqslant\mathrm{cat}(\eta(F_\varepsilon\backslash\mathring{N}))+\mathrm{cat}(K_c) &&\text{(形变不减性)}\\&\leqslant\mathrm{cat}(\mathbf{f}_{c-\varepsilon})+\mathrm{cat}(K_c) &&\text{(单调性)}\\&\leqslant m+\mathrm{cat}(K_c),\end{aligned}$$

即得

$$\mathrm{cat}(K_c)\geqslant k.$$

最后，由畴数的规范性，可见K_c至少含有k个不同的点.

证毕.

推论1.2 设$\mathbf{f}$满足定理1.4中的条件，并且是下方有界的；则$\mathbf{f}$至少有$\mathrm{cat}(M)$个不同的临界点.

证明 由设$c_k\leqslant c_{k+1}$，如果$m=\mathrm{cat}(M)$，并且$c_m<+\infty$，那么由前面的证明，直接得到至少m个不同的临界点. 倘若有$m\leqslant\mathrm{cat}(M)$，使$c_m=+\infty$并且$\mathbf{f}$只有有穷多个临界值(否则已有无穷多个临界点). 于是必有实数c，使得$K\cap\mathbf{f}^{-1}[c,+\infty]=\emptyset$. 按形变定理1.5(参看下段1.4节)，$M$可以形变收缩到$\mathbf{f}_c$，由畴数的形变不减性，$m\leqslant\mathrm{cat}(\mathbf{f}_c)$. 这显然蕴含了：

$$c_m=\inf_{\mathrm{cat}(A)\geqslant m}\sup_{x\in A}\mathbf{f}(x)\leqslant c,$$

便与 $c_m=+\infty$ 矛盾.

这样一来,我们的任务便明确了:(1) 在 Finsler 流形 M 上建立伪梯度流,证明形变定理,(2) 估计 Finsler 流形 M 的畴数 $\operatorname{cat}(M)$.

1.4 流形上的伪梯度向量场与形变定理

现在平行于第三章 §1, 把伪梯度、伪梯度向量场以及上节所说的形变定理建立在 Finsler 流形 M 上, 除了这个形变定理加深了第三章 §1 的结论外,其余都是平行的搬弄.

定义 1.4 设 M 是一个 Finsler 流形, $\mathbf{f}: M\to\mathbb{R}^1$ 在 $p\in M$ 可微. $X\in T(M)_p$ 称为是一个伪梯度向量, 记作 p. g. (pseudo-gradient),如果

(1) $\|X\|\leqslant 2\|d\mathbf{f}(p)\|$,

(2) $\langle d\mathbf{f}(p),\ X\rangle\geqslant\|d\mathbf{f}(p)\|^2$,

其中$\langle,\rangle_p$ 表示 $T(M)_p$ 上的对偶. 设 $\mathbf{f}$ 在 M 的一个子集 S 上可微. X 称为 S 上的一个伪梯度向量场, 记作 p. g. v. f., 如果 $\forall p\in S$, X_p 是 $\mathbf{f}$ 在 p 点的一个伪梯度向量.

引理 1.5 设 M 是一个 Finsler 流形, $\mathbf{f}: M\xrightarrow{C^1}\mathbb{R}^1$, 又设 $M^*=M\setminus K$,其中 K 是 $\mathbf{f}$ 的临界集. 则 $\forall p\in M^*$,存在着 $\mathbf{f}$ 在 p 点的一个伪梯度向量.

证明 因为 $\|d\mathbf{f}(p)\|\neq 0$. 由定义,$\exists X\in T(M)_p$ 适合 $\|X\|=1$ 以及 $\langle d\mathbf{f}(p),\ X\rangle_p>\frac{2}{3}\|d\mathbf{f}(p)\|$. 令 $Y=\frac{3}{2}\|d\mathbf{f}(p)\|X$, 则 $\|Y\|=\frac{3}{2}\|d\mathbf{f}(p)\|<2\|d\mathbf{f}(p)\|$, $\langle d\mathbf{f}(p),\ Y\rangle_p>\|d\mathbf{f}(p)\|^2$.

类似于第二章 §3.1 中的性质 3.1 与 3.2, 有

1° 设 $\mathbf{f}: M\xrightarrow{C^1}\mathbb{R}^1$ 满足 P. S. 条件, 则 $\forall a,\ b\in\mathbb{R}^1$, $a<b$, 只要 $K\cap\mathbf{f}^{-1}[a,\ b]=\emptyset$,则有 $b,\ \varepsilon>0$ 使得

$$\|d\mathbf{f}(p)\|\geqslant b\quad\forall p\in\mathbf{f}^{-1}[a-\varepsilon,\ b+\varepsilon].$$

2° 设 $\mathbf{f}: M\xrightarrow{C^1}\mathbb{R}^1$ 满足 P. S. 条件, 则 $\forall c\in\mathbb{R}^1$, $K_c=K\cap$

$\mathbf{f}^{-1}(c)$是紧集.

定理1.6 设 M 是一个C^1-Finsler 流形. 又设 $\mathbf{f}: M\to\mathbb{R}^1$ 是 C^1 连续的. 则在 $M^*=M\backslash K$ 上存在着 $\mathbf{f}$ 的一个局部 Lip. 的伪梯度向量场.

为此需要

引理1.6 设 M 是一个仿紧的 C^1 Banach 流形. 又设 $\{U_\alpha|\alpha\in A\}$是 M 的一个开覆盖. 则必存在 M 的一个 C^{1-0} 单位分解$\{\varphi_\beta|\beta\in B\}$, 适合 $\operatorname{supp}\varphi_\beta\subset U_{\alpha(\beta)}$, 对某个 $\alpha(\beta)$, $\forall\beta\in B$.

证明 由于 M 是仿紧的, 所以对它的任意坐标系$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)|\alpha\in A\}$, 有一个$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$的局部有限的加细开覆盖$\{\mathcal{O}_\beta|\beta\in B\}$. 对任意 $\beta\in B$, 选取 $\alpha(\beta)\in A$, 适合 $\mathcal{O}_\beta\subset U_{\alpha(\beta)}$, 并令 $\tilde{V}_\beta=\psi_{\alpha(\beta)}(\mathcal{O}_\beta)\subset\mathscr{X}$, 其中 $\mathscr{X}$ 是装备在 M 上的 Banach 空间, 以及

$$h_\beta(x)=\inf\{\|x-y\|\,|\,y\notin\tilde{V}_\beta\},$$

则 $h_\beta\geqslant 0$, 并且 $\tilde{V}_\beta=\{x\in\mathscr{X}|h_\beta(x)>0\}$ (因为 $\tilde{V}_\beta$ 是开的). 此外 $h_\beta\in C^{1-0}$. 事实上, $\forall x_1, x_2\in\mathscr{X}$ 以及 $\forall\varepsilon>0$, 选择 $y\notin\tilde{V}_\beta$, 使得

$$\|x_2-y\|\leqslant h_\beta(x_2)+\varepsilon;$$

则

$$\begin{aligned}h_\beta(x_1)&\leqslant\|x_1-y\|\leqslant\|x_1-x_2\|+\|x_2-y\|\\&\leqslant\|x_1-x_2\|+h_\beta(x_2)+\varepsilon.\end{aligned}$$

从而有
$$h_\beta(x_1)-h_\beta(x_2)\leqslant\|x_1-x_2\|+\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意的, 并且 x_1 与 x_2 的位置可以互换, 所以有

$$|h_\beta(x_1)-h_\beta(x_2)|\leqslant\|x_1-x_2\|.$$

令 $f_\beta=h_\beta\circ\psi_{\alpha(\beta)}$, 则 $f_\beta\geqslant 0$, 并且 $\mathcal{O}_\beta=\{p\in M|\mathbf{f}_\beta(p)>0\}$. 而函数 $f_\beta\in C^{1-0}$. 再令

$$\varphi_\beta=\frac{f_\beta}{\sum\limits_{\beta'\in B}f_{\beta'}},$$

则$\{\varphi_\beta\}$即为所求.

定理1.6的证明 由引理1.6, $\forall p\in M^*$, $\exists X_p\in T(M)$, 使得

$$\|X_p\|<2\|d\mathbf{f}(p)\|,$$
$$\langle d\mathbf{f}(p), X_p\rangle_p>\|d\mathbf{f}(p)\|^2.$$

设 $p_0\in$ 某坐标 (p_α, U_α)，在这坐标下，$T(M)|_{U_\alpha}\approx U_\alpha\times\mathscr{X}$. 于是 $X_{p_0}\in\mathscr{X}$. 取 U_α 中 p_0 的一个小开邻域 $V_{p_0}\subset M^*$，使得

$$\begin{aligned}&\|X_{p_0}\|<2\|d\mathbf{f}(p)\|,\\ &\langle d\mathbf{f}(p),\ X_{p_0}\rangle_p>\|d\mathbf{f}(p)\|^2,\end{aligned}\quad \forall p\in V_{p_0}.$$

因为 M^* 是可度量化的，所以是仿紧的. 按引理 1.6，在 M^* 上有一个局部有限的单位分解 $\{\varphi_\beta|\beta\in B\}$，满足 $\operatorname{supp}\varphi_\beta\subset V_{p_0}$，对某个 $p_0=p_0(\beta)\in M^*$，且 $\varphi_\beta\in C^{1-0}$. 令

$$X:=X(p)=\sum\varphi_\beta(p)X_{p_0(\beta)},$$

则 X 即是所要的伪梯度向量场. 事实上，

$$\begin{aligned}\|X(p)\|&\leqslant\sum\varphi_\beta(p)\|X_{p_0(\beta)}\|<2\|d\mathbf{f}(p)\|\\ \langle d\mathbf{f}(p),\ X(p)\rangle_p&=\sum\varphi_\beta(p)\langle d\mathbf{f}(p),\ X_{p_0(\beta)}\rangle_p\\ &>\sum\varphi_\beta(p)\|d\mathbf{f}(p)\|^2\\ &=\|d\mathbf{f}(p)\|^2,\end{aligned}$$

并且 $\forall p_0\in M^*$，$\exists p_0$ 的邻域 U，使得 $\varphi_\beta(p)\equiv0$，$\forall p\in U$，除了有限多个 β 而外. 而在 U 上，每个非零的 φ_β 是 C^{1-0} 的，于是 X 还是 C^{1-0} 的.

定理 1.5 的证明　1° 因为 K_c 是紧的(P. S. 条件)，而 M 是可度量化的，有度量 ρ (见第一章 § 2)，于是有 $\delta>0$ 使得 $N_\delta=\{p\in M|\operatorname{dist}(p,\ K_c)\leqslant\delta\}\subset N$. 再由 P. S. 条件，$\exists b,\ \bar{\varepsilon}>0$ 使得

$$\|d\mathbf{f}(p)\|\geqslant b\quad\forall x\in\mathbf{f}^{-1}[c-\bar{\varepsilon},\ c+\bar{\varepsilon}]\setminus N_{\frac{\delta}{8}}.$$

2° 选取局部 Lipschitz 函数

$$\bar{g}(p)=\begin{cases}1, & p\notin N_{\frac{\delta}{4}},\\ 0, & p\in N_{\frac{\delta}{8}},\end{cases}\quad 0\leqslant\bar{g}(p)\leqslant1. \tag{1.9}$$

这样的函数总可以构成. 因为对于 M 上任意两个不相交的闭集 $A,\ B$，令

$$l(p)=\frac{\operatorname{dist}(p,\ A)}{\operatorname{dist}(p,\ A)+\operatorname{dist}(p,\ B)},$$

就有 $l(p)=0$ 当 $p\in A$，$l(p)=1$ 当 $p\in B$；且 $0\leqslant l(p)\leqslant1$.

取 $0<\varepsilon<\min\left\{\bar{\varepsilon}, \frac{b\delta}{8}, \frac{b}{8}\right\}$. 以及局部 Lipschitz 函数

$$g(p)=\begin{cases}0, & x\notin \mathbf{f}^{-1}[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}],\\ 1, & x\in \mathbf{f}^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon],\end{cases}\quad 0\leqslant g(p)\leqslant 1, \quad (1.10)$$

再令
$$V(p)=-g(p)\bar{g}(p)\frac{X(p)}{\|X(p)\|},$$
则 V 是 M^* 上的一个向量场, 又因为 $\mathbf{f}^{-1}[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}]\backslash N_{\frac{\delta}{8}}\subset M^*$, 所以 V 实际上在整个 M 上都有定义, 并且是局部 Lipschitz 的, 还满足:

$$\|V(p)\|\leqslant 1.$$

3° 作流

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=V(\eta(t)),\\ \eta(0, p)=p.\end{cases}\tag{1.11}$$

按第一章 § 2.4, $\forall p\in M$, $\exists t(p)>0$, 使 $[0, t(p))$ 是 (1.11) 的解 $\eta(t, p)$ 存在的正半极大区间. 我们来证: $t(p)=+\infty$.

倘若不然, 由距离的定义 (见第一章 § 2.4),

$$\rho(\eta(t_2, p), \eta(t_1, p))\leqslant l(\eta)\triangleq\int_{t_1}^{t_2}\|\eta'(t, p)\|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant|t_1-t_2|\to 0,$$

当 $t_1, t_2\to t(p)$. 从而 $\eta(t, p)\to p^*\in M$. 当 $t\to t(p)$. 由于以 p^* 点为初始点, 方程 (1.11) 还有局部解, 然而 η 对 t 具有半群性质. 所以便与 $t(p)$ 的极大性矛盾. 再由流对初值的连续依赖性, 就有 $\eta:\mathbb{R}^1\times M\to M$ 是连续的.

4° 由 V 的构造, 立得

$$\eta(t, \cdot)|_{C\mathbf{f}^{-1}[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}]}=id|_{C\mathbf{f}^{-1}[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}]}.$$

至于 $\eta(0, \cdot)=id$, 以及 $\eta(t, \cdot): M\to M$ 同胚都是流的自然推论. 剩下来验证:

$$\eta(1, \mathbf{f}_{c+\varepsilon}\backslash\mathring{N}_\delta)\subset\mathbf{f}_{c-\varepsilon}.$$

为此先证:

(a) $\rho(\eta(t, p), p)\leqslant t$,

(b) 若 $\eta(s,p)\in \mathbf{f}^{-1}[c-\varepsilon,\ c+\varepsilon]\setminus N_{\frac{\delta}{4}}\quad \forall s\in[0,t)$，则

$$\mathbf{f}(p)-\mathbf{f}(\eta(t,p))\geqslant\frac{b}{2}t.$$

事实上，(a)由下列不等式推出：

$$\rho(\eta(t,p),p)\leqslant l(\eta)\triangleq\int_0^t\|\eta'(s,p)\|\mathrm{d}s\leqslant t.$$

而(b)是由于

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(p)-\mathbf{f}(\eta(t,p))&=-\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{f}(\eta(s,p))\mathrm{d}s\\&=-\int_0^t\langle\mathrm{d}\mathbf{f}(\eta(s,p)),\ \eta'(s,p)\rangle_{\eta(s,p)}\mathrm{d}s\\&=\int_0^t g(q)\bar{g}(q)\left\langle\mathrm{d}\mathbf{f}(q),\frac{X(q)}{\|X(q)\|}\right\rangle_q\Big|_{q=\eta(s,p)}\mathrm{d}s\\&\geqslant\frac{b}{2}t.\end{aligned}$$

5° 将证

$$\eta(t_0,p)\in\mathbf{f}_{c-\varepsilon},\ \forall p\in\mathbf{f}_{c+\varepsilon}\setminus\mathring{N}_\delta,\ t_0=\frac{4}{b}\varepsilon. \tag{1.12}$$

首先，不妨设 $p\in\mathbf{f}^{-1}[c-\varepsilon,\ c+\varepsilon]\setminus\mathring{N}_\delta$. 这是因为流使函数值下降：

$$\mathbf{f}(p)-\mathbf{f}(\eta(t,p))=\int_0^t g(q)\bar{g}(q)\left\langle\mathrm{d}\mathbf{f}(q),\frac{X(q)}{\|X(q)\|}\right\rangle_q\Big|_{q=\eta(s,p)}\mathrm{d}s\geqslant 0.$$

其次用反证法，倘若(1.12)不对，也就是说，$\exists p_0\in\mathbf{f}^{-1}[c-\varepsilon,\ c+\varepsilon]\setminus\mathring{N}_\delta$，$\exists t_0>0$ 使得 $\eta(s,p_0)\notin\mathbf{f}_{c-\varepsilon}$，$\forall s\in[0,t_0)$. 于是有 $(s_0,p_0)\in[0,t_0)\times(\mathbf{f}^{-1}[c-\varepsilon,c+\varepsilon]\setminus\mathring{N}_\delta)$，使得 $\eta(s_0,p_0)\in N_{\delta/4}$ 但 $\eta(s,p_0)\notin N_{\delta/4}$，$\forall s\in[0,s_0)$. 这蕴含了

$$\begin{aligned}\rho(\eta(s_0,p_0),p_0)&\leqslant s_0 &&(\text{由 }4^\circ(\mathrm{a}))\\&\leqslant\frac{2}{b}(\mathbf{f}(p_0)-\mathbf{f}(\eta(s_0,p_0)))&&(\text{由 }4^\circ(\mathrm{b}))\\&\leqslant\frac{4}{b}\varepsilon<\frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

但 $p_0\notin\mathring{N}_\delta$，所以 $\eta(s_0,p_0)\notin N_{\delta/2}$. 这便是一个矛盾. 因为 $t_0<1$，

而流使函数下降，定理得证.

推论 1.8　若 $K_c=\emptyset$，则在定理 1.5 的假设下，$\exists\bar{\varepsilon}>\varepsilon>0$，以及连续的 $\eta:[0,1]\times M\to M$，使得

$$\eta(t,\cdot)\big|_{\mathrm{f}^{-1}[c-\bar{\varepsilon},c+\bar{\varepsilon}]}=id\big|_{\mathrm{f}^{-1}[c-\bar{\varepsilon},c+\bar{\varepsilon}]},$$

$$\eta(0,\cdot)=id,$$

$$\eta(t,\cdot): M\to M \text{ 是同胚},\ \forall t\in[0,1];$$

$$\eta(1,\mathrm{f}_{c+\varepsilon})\subset\mathrm{f}_{c-\varepsilon}.$$

当 $K_c=\emptyset$ 时，类似于第三章定理 1.2 的结论也成立：

定理 1.7　设 $c\in\mathbb{R}^1$ 是 $\mathrm{f}\in C^1(M,\mathbb{R}^1)$ 的一个正则值. M 是一个 C^{2-0} Finsler 流形，f 满足 P. S. 条件. 则必 $\exists\varepsilon>0$，使得 $\mathrm{f}_{c-\varepsilon}$ 是 $\mathrm{f}_{c+\varepsilon}$ 的一个形变收缩.

证明与第三章定理 1.2 一样，从略.

剩下来的问题是如何估计 $\mathrm{cat}(M)$？这并不是一件容易的事. 它涉及到一些其它的拓扑不变量，如维数，上积长(cup length)等概念，而且对于一些分析上遇到的流形也远不易算出它的畴数，正是这个缘故，在下一节我们将引进 G 群指标，对于一些特殊 G 群，可以构造出便于计算的指标. 用以在某种程度上代替畴数在估计临界点上的功用.

至于畴数通过上积长的估计，我们把它放到第五章 §1.4 中去.

§2　指 标 理 论

具有对称性的泛函有较为丰富的临界点理论. 所谓对称性，是指存在着群的作用，而泛函在这群作用下是不变的.

2.1　群作用下不变的泛函

设 G 是一个紧拓扑群，$\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间. 考察 $G\to\mathscr{X}$ 上的等距在上线性算子 $U(\mathscr{X})$ 的一个连续表示 $T(G)$，即 $\forall g\in G$，有唯一的等距在上线性算子 $T_g\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})$ 与之对应，并且这对

应是一个连续同态:

(1) $T_{g_1g_2}=T_{g_1}\cdot T_{g_2}$, $\forall g_1, g_2\in G$,

(2) $(g, x)\mapsto T_gx$ 是 $G\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 连续的.

子集 $E\subset\mathscr{X}$ 称为是 $T(G)$ 的不变子集, 系指:

$$T_gE=E, \quad \forall g\in G.$$

映射 $h: E\to\mathscr{X}$ 称为是 $T(G)$ 等变的(equivariant), 系指:

$$h(T_gx)=T_gh(x), \quad \forall(g, x)\in G\times E.$$

函数 $\mathbf{f}: E\to\mathbb{R}^1$ 称为是 $T(G)$ 不变的(invariant), 系指:

$$\mathbf{f}(T_gx)=\mathbf{f}(x), \quad \forall(g, x)\in G\times E.$$

特别地, 如果 $M\subset\mathscr{X}$ 是嵌入在 $\mathscr{X}$ 中的一个 C^1 子流形, 又设 M 是 $T(G)$ 不变的, 则 M 的切空间之间有关系 $T_g(T_x(M))=T_{T_gx}(M)$, $\forall(g, x)\in G\times M$, 从而切丛 $T(M)$ 也是 $T(G)$ 不变的, 并且若 $\mathbf{f}\in C^1(M, \mathbb{R}^1)$, 且是 $T(G)$ 不变的, 则

$$\begin{aligned}&\langle d\mathbf{f}(T_gx), T_gy\rangle\\&\quad=\langle d\mathbf{f}(x), y\rangle, \forall(g, x)\in G\times M, \forall y\in T_x(M).\end{aligned}$$

事实上, 若 $y\in T_x(M)$, 这意味着 $\exists\alpha$: $(-1, +1)\to M$, 使得 $\alpha'(0)=y$, $\alpha(0)=x$; 则 $T_g\alpha$: $(-1, +1)\to M$, 满足 $(T_g\alpha)'(0)=T_gy$, $(T_g\alpha)(0)=T_gx$, 即 $T_gy\in T_{T_gx}(M)$, $\forall g\in G$. 此外,

$$\begin{aligned}\langle d\mathbf{f}(x), y\rangle&=\frac{d}{dt}\mathbf{f}(\alpha(t))\Big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}\mathbf{f}(T_g\alpha(t))\Big|_{t=0}\\&=\langle d\mathbf{f}(T_gx), T_gy\rangle.\end{aligned}$$

当然, 在这里, 我们始终把 $T_x(M)$ 看成嵌入在 $\mathscr{X}$ 中的线性子空间.

由此可见当 $\mathbf{f}\in C^1(M, \mathbb{R}^1)$, 并是 $T(G)$ 不变的时候, 其临界集 K_c, K 以及水平集 $\mathbf{f}_c$ 都是 $T(G)$ 不变的.

如果把余切空间嵌入到 $\mathscr{X}^*$ 内, 用 T_g^* 表示 T_g 的共轭算子, 那么上面的等式还可以写成

$$T_g^*d\mathbf{f}(T_gx)=d\mathbf{f}(x), \quad \forall(g, x)\in G\times\mathscr{X},$$

特别地，若 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间，则 $T(G)$ 是群 G 的一个酉表示，即 T_g 是酉(unitary)算子. 这时：

$$T_g^{-1}d\mathbf{f}(T_g x)=d\mathbf{f}(x), \quad \forall(g, x)\in G\times\mathscr{X}.$$

例 1 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间，$G=\mathbb{Z}_2$ 即由 $\{e, -e\}$ 组成的群：$e^2=(-e)^2=e$, $e(-e)=(-e)e=-e$. $T(G)$ 是 $T_e x=x$, $T_{-e}x=-x$, $\forall x\in\mathscr{X}$. 于是一切关于原点对称的子集 E 都是 $T(\mathbb{Z}_2)$ 不变的，一切奇映射 h: $h(-x)=-h(x)$, $h: E\to E$, 都是 $T(\mathbb{Z}_2)$ 等变的；而一切偶函数 $\mathbf{f}$: $\mathbf{f}(-x)=\mathbf{f}(x)$, $\forall x\in E$, 都是 $T(\mathbb{Z}_2)$ 不变的.

例 2 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间，$L^p(S^1, \mathscr{X})$ 是定义在 S^1 上取值于 L^p 的周期函数的全体，$1\leqslant p<\infty$. 又设 $G=S^1\triangleq\{e^{2\pi is}|s\in[0, 1]\}$ 是按乘法组成的拓扑群. 定义

$$(T_s u)(t)=u(s+t), \quad \forall s\in[0, 1],$$

则 T: $S^1\to U(L^p(S^1, \mathscr{X}))$ 是一个连续表示.

又设 $Y\subset\mathscr{X}$ 是一个线性子空间，$E=L^p(S^1, Y)$；则 E 是 $T(S^1)$ 不变的，泛函 $\mathbf{f}$: $E\to\mathbb{R}^1$, 如满足：

$$\mathbf{f}(u(s+t))=\mathbf{f}(u(t)), \quad \forall s\in[0, 1],$$

则是 $T(S^1)$ 不变的.

例 3 在例 1 中，若设 M 是一个光滑的关于原点对称的嵌入在 $\mathscr{X}$ 中的子流形，则 M 是 $T(\mathbb{Z}_2)$ 不变的. 特别地，若 $\mathscr{X}$ 是 Hilbert 空间，M 是其中的单位球面 S_1, 则 S_1 是 $T(\mathbb{Z}_2)$ 不变的光滑子流形.

现在，当我们面临一个 $T(G)$ 不变的 $\mathbf{f}\in C^1(M, \mathbb{R}^1)$ 时，为了估计它的临界点的个数，有两条可供选择的途径：

I. 考察轨道空间，即把 M 上的 $T(G)$ 轨道 $[x]=\{y=T_g x|g\in G\}$ 看成一个点，所得的商空间 $M/T(G)$ 称为轨道空间，用 M 上的拓扑诱导出它的拓扑. 因为 $\mathbf{f}$ 是 $T(G)$ 不变的，所以 $\mathbf{f}$ 还可以看成是 $M/T(G)$ 上的函数. 只要 $M/T(G)$ 还是一个 C^{2-0} 流形，并且不再是可收缩的，正如 §1 所做的那样，我们又回到 §1, 用 $M/T(G)$ 上的畴数 cat, 来估计 $\mathbf{f}$ 的临界点的个数.

II. 还在原来的流形 M 上考察函数 $\mathbf{f}$, 但因 $\mathbf{f}$ 是 $T(G)$ 不变的, 在应用极小极大原理时, 我们限定只取 $T(G)$不变的子集族; 为了使这族子集还能产生出临界值, 我们必须构造关于 $T(G)$等变的形变 η: $[0, 1]\times M\to M$.

不论采用哪一种途径,大家都将看到,$T(G)$的不动点集.

$$Fix_G\triangleq\{x\in M\mid T_g x=x\quad\forall g\in G\}$$

对于临界点个数的判定会带来不少麻烦.

下面,我们采用第 II 种途径,去产生一个完全类似于定理1.5的形变 η,当 M 与 $\mathbf{f}$ 都是 $T(G)$不变的时候, 要求 η 是 $T(G)$等变的. 即

定理2.1 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间, G 是一个紧拓扑群, $T(G)$是它的一个等距在上线性连续表示, 又设 M 是 $T(G)$ 不变的, 嵌入在 $\mathscr{X}$ 内的 C^{2-0} 子流形, $\mathbf{f}\in C^1(M, \mathbb{R}^1)$是 $T(G)$不变的, 满足 P. S. 条件. 又设 $c\in\mathbb{R}^1$, N 是 K_c 的一个闭邻域, 则必有一个 $T(G)$等变的连续映射 η: $[0, 1]\times M\to M$, 和 $\bar{\varepsilon}>\varepsilon>0$ 使得

(1) $\eta(t, \cdot)|_{f^{-1}[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}]}=id|_{f^{-1}[c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}]}$,

(2) $\eta(0, \cdot)=id$,

(3) $\eta(1, \mathbf{f}_{c+\varepsilon}\backslash\mathring{N})\subset\mathbf{f}_{c-\varepsilon}$,

(4) $\eta(t, \cdot)$是 $\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 的同胚,$\eta(t, T_g x)=T_g\eta(t, x)$, $\forall(g, x)\in G\times M$, $\forall t\in[0, 1]$.

在证明这个定理之前, 让我们回顾一下定理 1.5 的证明. 在那里所用的方法是通过泛函的下降流线把一个水平集拉到另一个水平集去的. 现在由于水平集是 $T(G)$不变的, 所以关键之处在于构造出 $T(G)$ 等变的伪梯度向量场, 并确认由这伪梯度向量场产生出的流也是 $T(G)$等变的,为此需要几个引理.

引理2.1 设 $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ 是两个 Banach 空间, $M\subset\mathscr{X}$ 是一闭集, F: $M\to\mathscr{Y}$ 是一个局部 Lip. 映射; 则对 M 上的任意紧集 K, ∃它的一个在 M 上的邻域 U, 使得 F 在 U 上是一致 Lip. 映射.

证明 $\forall u\in K$, ∃球 $B(u, \delta(u))$ 及常数 l_u 使得

$$\|F(x)-F(y)\|\leqslant l_u\|x-y\|,\quad\forall x, y\in B(u, \delta(u))\cap M.$$

因为 $\bigcup_{u\in K} B\left(u, \frac{1}{2}\delta(u)\right)\cap M$ 覆盖了 K，所以有有穷覆盖，设为 $\bigcup_{i=1}^{n} B\left(u_i, \frac{1}{2}\delta(u_i)\right)\cap M$，并令其为 U. 又设 $\delta=\min\{\delta(u_i)\mid i=1, \cdots, n\}$，以及

$$l=\max\left\{l_{u_i}, i=1, \cdots, n; \frac{4}{\delta}\sup_{u\in U}\|F(u)\|\right\}.$$

我们要证：$\|F(x)-F(y)\|\leqslant l\|x-y\|$，$\forall x, y\in U$.

分两种情况：

1° $\|x-y\|\geqslant\frac{\delta}{2}$，这时，

$$\begin{aligned}\|F(x)-F(y)\|&\leqslant\|F(x)\|+\|F(y)\|\\&\leqslant 2\sup_{u\in U}\|F(u)\|\leqslant l\|x-y\|.\end{aligned}$$

2° $\|x-y\|<\frac{\delta}{2}$，这时，若 $x\in B\left(u_i, \frac{1}{2}\delta(u_i)\right)$，则 $y\in B(u_i, \delta(u_i))$，从而有

$$\|F(x)-F(y)\|\leqslant l_{u_i}\|x-y\|\leqslant l\|x-y\|.$$

引理 2.3 在定理 2.1 的假设下，若 v: $M\to T(M)$ 满足局部 Lip. 条件；则

$$\hat{v}(x)=\int_G T_g^{-1}\circ v(T_g x)\mathrm{d}\mu$$

是 $T(G)$ 等变的，并满足局部 Lip. 条件，其中 $\mathrm{d}\mu$ 是 G 上的右不变 Haar 测度.

证明 由于 $\forall g'\in G$,

$$\begin{aligned}\hat{v}(T_{g'}x)&=\int_G T_g^{-1}\circ v(T_{gg'}x)\mathrm{d}\mu\\&=T_{g'}\int_G T_{gg'}^{-1}v(T_{gg'}x)\mathrm{d}\mu=T_{g'}\circ\hat{v}(x);\end{aligned}$$

所以 $\hat{v}$ 是 $T(G)$ 等变的.

再证局部 Lip. 条件. $\forall x\in M$，集合 $[x]=\{T_g x\mid g\in G\}$ 是紧的. 按引理 2.1，存在 $[x]$ 的在 M 上的邻域 U，使得 v 在 U 内一致 Lip. 即 $\exists l>0$，使

$$\|v(z)-v(y)\|\leqslant l\|z-y\|,\quad \forall z,\ y\in U.$$

记 $\delta=\operatorname{dist}([x],\ U)$，取 $V=B\left(x,\frac{\delta}{2}\right)\cap M$；则由 T_g 的等距性，$\forall(g,\ y)\in G\times V$，有 $\|T_gy-T_gx\|=\|x-y\|<\frac{\delta}{2}$，即 $T_gy\in U$。从而有

$$\|v(T_gy)-v(T_gz)\|\leqslant l\|y-z\|,\quad \forall y,\ z\in V,\ \forall g\in G.$$

于是，

$$\begin{aligned}\|\hat{v}(y)-\hat{v}(z)\|&\leqslant\int_G\|v(T_gy)-v(T_gz)\|\mathrm{d}\mu\\&\leqslant l\|y-z\|,\quad \forall y,\ z\in V.\end{aligned}$$

引理 2.3　在定理 2.1 的假设下 $\mathbf{f}$ 必有一个局部 Lip. 的，$T(G)$ 等变的，伪梯度向量场 $\hat{v}$。

证明　按第三章定理 1.1，$\mathbf{f}$ 有一个 p. g. v. f. v。令 $\hat{v}(x)=\int_G T_g^{-1}v(T_gx)\mathrm{d}\mu$，则由引理 2.2，$\hat{v}$ 是局部 Lip. 的，并且 $T(G)$ 等变的向量场。兹证其为一 p. g. v. f. 这是因为 $T(G)$ 是等距表示，所以

$$\begin{aligned}\|\hat{v}(x)\|&\leqslant\int_G\|v(T_gx)\|\mathrm{d}\mu\leqslant2\int_G\|\mathrm{d}\mathbf{f}(T_gx)\|\mathrm{d}x\\&=2\int_G\|T_g^{*-1}\mathrm{d}\mathbf{f}(x)\|dx=2\|\mathrm{d}\mathbf{f}(x)\|,\end{aligned}$$

并有

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{d}\mathbf{f}(x),\ \hat{v}(x)\rangle&=\int_G\langle\mathrm{d}\mathbf{f}(x),\ T_g^{-1}v(T_gx)\rangle\mathrm{d}\mu\\&=\int_G\langle\mathrm{d}\mathbf{f}(T_gx),\ v(T_gx)\rangle\mathrm{d}\mu\\&\geqslant\int_G\|\mathrm{d}\mathbf{f}(T_gx)\|^2\mathrm{d}\mu\\&=\|\mathrm{d}\mathbf{f}(x)\|^2.\end{aligned}$$

引理 2.4　设 V 是 $T(G)$ 等变的局部 Lip. 向量场，又设 $\eta(t,\ x)$ 是方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}=V(\eta),\\ \eta(0,\ x)=x\end{cases}\qquad(2.1)$$

的解. 则 $\eta(t,\cdot)$ 是 $T(G)$ 等变的.

证明 因为 $\forall g\in G$,

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T_g\eta(t,x)}{\mathrm{d}t}=T_gV(\eta(t,x))=V(T_g\eta(t,x)),\\ T_g(\eta(0,x))=T_gx,\end{cases}$$

由于方程(2.1)的解的唯一性, 立得

$$T_g\eta(t,x)=\eta(t,T_gx).$$

定理2.1的证明 比较定理1.5, 证明完全类似. 只需注意, 由于 K_c 是 $T(G)$ 不变子集, 所以它的 δ 邻域 N_δ 也是 $T(G)$ 不变的. 于是定理1.5证明中引进的函数 $\bar{g}$ 是 $T(G)$ 不变的. 又因为 $\mathbf{f}$ 的水平集都是 $T(G)$ 不变的, 所以函数 g 也是 $T(G)$ 不变的. 如此最后得到的向量场 $V(x)$ 便是 $T(G)$ 等变的. 其余步骤同定理1.5. 最后, 由于引理2.4, 所得的形变 η 是等变的.

注1.4 当 $M=\mathscr{X}$ 时, 定理2.1(形变引理)中的函数 $\mathbf{f}$ 的 C^1 光滑性还可以减弱. 我们曾在第二章§2.3中, 对局部 Lipschitz 函数 $\mathbf{f}$ 定义过广义导数: $\partial\mathbf{f}(x)$, $\forall x\in\mathscr{X}$. 其中 $\partial\mathbf{f}(x)$ 是 $\mathscr{X}^*$ 中的非空、w^* 紧凸子集. 如果推广临界点的概念, 把那些满足 $\theta\in\partial\mathbf{f}(x_0)$ 的点 $x_0\in\mathscr{X}$ 称为临界点, 同样地定义临界值、正则值和正则点. 仍然记 K 为一切临界点的集合. 并令

$$\lambda(x)=\min_{w\in\partial\mathbf{f}(x)}\|w\|_{\mathscr{X}^*}.$$

类似地引入 P.S. 条件. 对 C^{1-0} 函数 $\mathbf{f}$, 称它满足 P.S. 条件, 是指: $\forall\{x_n\}\subset\mathscr{X}$,

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{f}(x_n)\text{有界}\\ \lambda(x_n)\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow\{x_n\}\text{有强敛子列}.$$

不难验证: 这时第三章§1的性质1.1°与1.2°依然成立. 特别地, 若 $K\cap\mathbf{f}^{-1}[a,b]=\emptyset$; 则 $\exists\varepsilon,\ \delta>0$, 使得

$$\lambda(x)>\varepsilon\quad\forall x\in\mathbf{f}^{-1}[a-\delta,b+\delta].$$

为了推广形变引理, 我们只要在 $\mathscr{X}\backslash K$ 上建立起类似的伪梯度向量场就够了. 我们有下列的:

引理2.5 设 $\mathbf{f}\in C^{1-0}(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$, $K\cap\mathbf{f}^{-1}[a,b]=\emptyset$; 则必有

$V: \mathbf{f}^{-1}[a, b] \xrightarrow{C^{1-0}} \mathscr{X}$，满足

$$\|V(x)\| \leqslant 1,$$
$$\langle x^*, V(x)\rangle \geqslant \varepsilon/2, \quad \forall x^* \in \partial\mathbf{f}(x).$$

证明 1° $\forall x_0 \in \mathbf{f}^{-1}[a, b]$，$\exists w_0 \in \partial\mathbf{f}(x_0)$ 使得 $\|w_0\| = \lambda(x_0)$，因为 $\partial\mathbf{f}(x_0)$ 是 w^* 紧凸子集，$\bar{B}(\theta, r)$ 是 w^* 闭凸集．当 $0<r<\|w_0\|$ 时，$\bar{B}(\theta, r) \cap \partial\mathbf{f}(x_0) = \emptyset$．在 $\mathscr{X}^*$ 上赋予 w^*-弱拓扑，应用 Hahn-Banach 定理（参看 Kelley-Namioka [KN1, p. 119]），有 $h \in (\mathscr{X}^*_{w^*})^*$，使得

$$\langle h, x^*\rangle > \langle h, w\rangle, \forall x^* \in \partial\mathbf{f}(x_0), \|w\| \leqslant r.$$

但 $(\mathscr{X}^*_{w^*})^*$ 与 $\mathscr{X}$ 在下列意义下是一致的：$\exists v \in \mathscr{X}$，使得：$\langle h, x^*\rangle = \langle x^*, v\rangle$，$\forall x^* \in \mathscr{X}^*$（参看 Kelley-Namioka [KN1, p. 155]）．于是有

$$\langle x^*, v\rangle > \langle w, v\rangle, \forall x^* \in \partial\mathbf{f}(x_0), \|w\| \leqslant r,$$

即

$$\inf_{x^* \in \partial\mathbf{f}(x_0)} \langle x^*, v\rangle > r\|v\|.$$

特别地，取 $r = \frac{\varepsilon}{2}$．以下设 $\|v\| = 1$．

2° 类似于第三章定理 1.1，$\exists$ 邻域 N_{x_0} 使得

$$\inf_{x^* \in \partial\mathbf{f}(x)} \langle x^*, v\rangle > \varepsilon/2, \forall x \in N_{x_0}$$

（$\partial\mathbf{f}(x)$ 的 w^* 上半连续性．参看第二章 § 2.3）．记 $\{\beta_\alpha(x)\}$ 为对应于 $\{N_{x_0} | x_0 \in \mathbf{f}^{-1}[a, b]\}$ 的局部有穷加细覆盖的单位分解（参看第三章定理 1.1）．令

$$V(x) = \sum_{\alpha \in A} \beta_\alpha(x) v_\alpha,$$

则 $V(x)$ 满足

$$\|V(x)\| \leqslant 1,$$

$$\langle x^*, V(x)\rangle = \sum_{\alpha \in A} \beta_\alpha(x) \langle x^*, v_\alpha\rangle > \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x^* \in \partial\mathbf{f}(x).$$

由引理 2.5，仿定理 1.5 的证明，选取局部 Lip. 函数

$$\bar{g}(p) = \begin{cases} 1, & p \notin N_{\frac{\delta}{4}}, \\ 0, & p \in N_{\frac{\delta}{8}}, \end{cases}$$

$$g(p)=\begin{cases}0, & p\notin \mathbf{f}^{-1}[c-\bar{\varepsilon},\ c+\bar{\varepsilon}],\\ 1, & p\in \mathbf{f}^{-1}[c-\varepsilon,\ c+\varepsilon].\end{cases}$$

我们就得到推广的定理 2.1，其中假设 $\mathbf{f}\in C^{1-0}$(参看张恭庆[Ch4]).

有了这个形变引理以后，第三章 § 2 的所有由环绕产生的临界值定理，本章的定理 1.4 以及下面的定理 2.2 中的 Люстерник-Шнирельман 重数定理对于 $\mathbf{f}\in C^{1-0}$ 都成立.

2.2 指标

在流形 M 上，Люстерник-Шнирельман 重数定理是靠畴数决定出的一列集族，结合极小极大原理得到的，它给出了临界点个数的一个估计.

平行于第 I 种途径，对每个 $T(G)$ 不变的闭子集，我们定义一个正整数或 $+\infty$，称之为这集合的指标，让它也能起到畴数在重数定理中的作用. 为此，分析一下定理 1.4 的证明，并抽出其中所用到的畴数的性质. 引出

定义 2.1(指标) 设 Σ 表示 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 中一切 $T(G)$ 不变的闭子集的全体.

H 表示 $\mathscr{X}$ 到自身的一切 $T(G)$ 等变的连续映射的全体.

$i: \Sigma\to\mathbb{Z}_+\cup\{+\infty\}$，$\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数集. 称 i 是一个 $T(G)$ 指标，如果下列条件成立：

(a) $i(A)=0\Leftrightarrow A=\emptyset$;

(b) (单调性) $A\subset B\Rightarrow i(A)\leqslant i(B)$, $\forall A,\ B\in\Sigma$;

(c) (次可加性) $i(A\cup B)\leqslant i(A)+i(B)$, $\forall A,\ B\in\Sigma$;

(d) (超变性) $i(A)\leqslant i(\overline{h(A)})$, $\forall (A,h)\in\Sigma\times H$;

(e) (连续性) $\forall A\in\Sigma$, 若 A 紧，则 $\exists A$ 的一个邻域 $N\in\Sigma$，使得 $A\subset \mathrm{int}(N)\subset N$，适合

$$i(N)=i(A).$$

检查一下定理 1.4 的证明，我们实际上只用到了畴数的这几条性质(a)～(e). 这样一来，定理 1.4 的证明立即转化成以下定

理的证明.

定理 2.2 在定理 2.1 的假设下,又设 i 是一个 $T(G)$ 不变指标. 若令

$$c_m = \inf_{i(A)\geqslant m}\sup_{x\in A} \mathbf{f}(x),\ m=1,\ 2,\ \cdots, \tag{2.2}$$

其中 $A\subset M$, $A\in\Sigma$, 则

(1) 当 $-\infty<c_m<+\infty$ 时, c_m 是 $\mathbf{f}$ 的临界值;

(2) 若 $-\infty<c=c_{m+1}=\cdots=c_{m+k}<+\infty$, 则

$$i(K_c)\geqslant k;$$

(3) $c_m\leqslant c_{m+1}$.

证明 这是下一个定理——定理 2.3 的特殊情形. 参看定理 2.3 的证明.

为了估算指标,引入

定义 2.2 设 i 是一个 $T(G)$ 指标,称它满足 d 维数性质(d 是一个正整数),如果

$$i(V^{dk}\cap S_1)=k \quad 当 \quad V^{dk}\cap \mathrm{Fix}_G=\{\theta\},$$

$k=1,\ 2,\ \cdots$, 其中 $V^{dk}\in\Sigma$, 是一个 dk 维 $T(G)$ 不变子空间, 而 S_1 是单位球面.

对于满足 d 维数性质的指标,有下列

性质 2.1 设 $A\in\Sigma$, $A\cap\mathrm{Fix}_G\neq\emptyset$, 则

$$i(A)\geqslant\sup\{k\in\mathbb{Z}_+ \mid \exists V^{dk}\ 是\ T(G)\ 不变子空间,$$
$$满足:\ V^{dk}\cap\mathrm{Fix}_G=\{\theta\}\}.$$

证明 任取 $p\in\mathrm{Fix}_G$, 作常值映射 $\psi: \mathscr{X}\to\{p\}$, 则 ψ 是 $T(G)$ 等变的连续映射:

$$T_g\psi(x)=T_gp=p=\psi(T_gx) \quad \forall(x,\ g)\in\mathscr{X}\times G.$$

所以由单调性、超变性以及 d 维数性质, $\forall V^{dk}-T(G)$ 不变子空间, 满足 $V^{dk}\cap\mathrm{Fix}_G=\{\theta\}$, 有

$$i(A)\geqslant i(\{p\})=i(\psi(\mathscr{X}\cap S_1))$$
$$\geqslant i(\mathscr{X}\cap S_1)\geqslant i(V^{dk}\cap S_1)=k.$$

注 2.2 在许多情况下, 只要 $p\in\mathrm{Fix}_G$, 就有 $i(\{p\})=+\infty$.

例如 $\mathscr{X}$ 是 ∞ 维 Hilbert 空间，并且 $\mathrm{Fix}_G{}^{\perp}$ 还是 ∞ 维的.

性质 2.2 设 $A\in\Sigma$, $V^{dk}\cap\mathrm{Fix}_G=\{\theta\}$; 并且 $A\subset V^{dk}\setminus\{\theta\}$, V^{dk} 是 $T(G)$ 的一个不变线性子空间，则

$$i(A)\leqslant k.$$

证明 因为 $\theta\notin A$, 而 A 闭；可以取 $\varepsilon>0$ 使得 $A\cap B_\varepsilon=\emptyset$, 其中 B_ε 是中心在 θ, 半径为 ε 的球. 取 $\mathbb{R}^1_+$ 上的连续正值函数 η 如下：$\eta(t)=t$ 当 $t\geqslant\varepsilon$, 而 $\eta(t)=1$ 当 $t\leqslant\varepsilon/2$. 令

$$h(x)=\frac{x}{\eta(\|x\|)},$$

则 $h:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 是 $T(G)$ 等变的：

$$h(T_gx)=\frac{T_gx}{\eta(\|T_gx\|)}=T_g\frac{x}{\eta(\|x\|)}=T_gh(x).$$

由超变性和单调性有

$$i(A)\leqslant i(\overline{h(A)})\leqslant i(V^{dk}\cap S_1)=k.$$

性质 2.3 设 $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\oplus\mathscr{X}_2$, $\dim(\mathscr{X}_1)=kd$, 其中 $\mathscr{X}_i$ 是 $T(G)$ 不变子空间，$i=1, 2$. 又设 $\mathscr{X}_1\cap\mathrm{Fix}_G=\{\theta\}$, $A\in\Sigma$, $i(A)>k$; 则必有 $A\cap\mathscr{X}_2\neq\emptyset$.

证明 倘若 $A\cap\mathscr{X}_2=\emptyset$, 考察 $\mathscr{X}\to\mathscr{X}_1$ 的投影 P_1, 则 P_1 是 $T(G)$ 等变的，并且 $\theta\notin P_1(A)$. 取 η 如上，作 $h: x\mapsto\dfrac{P_1x}{\eta(\|P_1x\|)}$, 则 $h:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ $T(G)$ 等变，并且 $A\to\mathscr{X}_1\cap S_1$. 由超变性和单调性以及 d 维数性质，有

$$i(A)\leqslant i(\overline{h(A)})\leqslant i(\mathscr{X}_1\cap S_1)=k.$$

这与假设 $i(A)>k$ 矛盾.

指标的引入，目的在于估计临界点的 $T(G)$ 轨道 $[p]=\{T_gp\mid g\in G\}$ 的个数，又注意到性质 2.1, 所以我们引入

定义 2.3(规范性) 称 $T(G)$ 不变指标 i 是规范的，如果对任意一个 $T(G)$ 轨道 $[p]$, 只要 $[p]\cap\mathrm{Fix}_G=\emptyset$, 都有 $i([p])=1$.

对于规范指标 i, 还有下列性质.

性质 2.4 设 K 是一个 $T(G)$ 不变的紧子集，$K\cap\mathrm{Fix}_G=\emptyset$; 则 $i(K)<+\infty$.

证明 因为 Fix_G 是闭集，于是有开集 U 使得 $K\subset U$, $U\cap \mathrm{Fix}_G=\emptyset$; 这个开集 U 还可以取得是 $T(G)$ 不变的（K 的 δ-邻域）. 于是 K 可以被有穷个 $T(G)$ 轨道集 $[p_j]$ 的 $T(G)$ 不变开邻域 V_j, $j=1, \cdots, m$ 所覆盖: $K\subset\bigcup_{j=1}^{m}V_j\subset U$. 从而

$$i(K)\leqslant\sum_{j=1}^{m} i(V_j)=\sum_{j=1}^{m} i([p_j])=m.$$

这里，用到了指标的连续性：选取 V_j 是 $[p_j]$ 的这种邻域使得

$$i(V_j)=i([p_j]),\quad j=1, \cdots, m.$$

性质 2.5 设 $A\in\Sigma$, $A\cap\mathrm{Fix}_G=\emptyset$, 并且 $i(A)=k$; 则 A 中至少有 k 个不同的 $T(G)$ 轨道.

证明 用反证法，利用指标的次可加性和规范性.

性质 2.4 与 2.5 蕴含了：定理 2.2 中的 K_c 至少含有 k 个不同的 $T(G)$ 轨道，只要

$$K_c\cap\mathrm{Fix}_G=\emptyset.$$

从上面的讨论发现：对于一个紧拓扑群 G, 由于一般说来 $\mathrm{Fix}_G\neq\emptyset$, 这个不变集 Fix_G 在判定临界点的轨道集的个数时将是一个非常讨厌的障碍. 在具体问题的应用中，我们将想方设法绕过它去.

2.3 伪指标

上面所说的指标 i 不依赖于给定的泛函 $\mathbf{f}$. 然而，正如在第三章 §4 中所看到的，应用极小极大原理时，可以把泛函 $\mathbf{f}$ 的性质考虑在内，这样做便有较大的活动余地. 从这个想法出发，我们引进伪指标的概念.

沿用第三章 §1 中的记号，不过现在添加 $T(G)$ 等变性对给定的泛函 $\mathbf{f}$, 以及区间 $J=(a, b)$, 记

$$\Phi_J^G(\mathbf{f})=\{\phi: \mathscr{X}\to\mathscr{X}\mid\exists\eta: [0, 1]\times\mathscr{X}\to\mathscr{X}\ T(G)$$

等变连续，满足: $\eta(0, \cdot)=id$, $\eta(t, \cdot)|_{\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{R}\setminus J)}=id_{\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{R}\setminus J)}$, $\eta(1, \cdot)=\phi$, 以及 $\mathbf{f}(\eta(t, x))\leqslant\mathbf{f}(x)\ \forall(t, x)\}$.

$\Phi_J^d(\mathbf{f})=\{\eta\colon \mathscr{X}\to\mathscr{X}\mid T(G)$ 等变连续同胚，满足 $\eta|_{\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{R}\setminus J)}=id_{\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{R}\setminus J)}$，$\mathbf{f}(\eta(x))\leqslant\mathbf{f}(x)$，$\forall x\in\mathscr{X}\}$.

定义 2.4 称 (Σ^*, i^*) 是关于 $T(G)$ 指标 i 的一个相对于 $H^*=\Phi_J^d(\mathbf{f})$，(或 $\Phi_J^h(\mathbf{f})$) 的伪指标，如果

$$i^*\colon \Sigma^*\to\mathbb{Z}_+\cup\{+\infty\} \quad 满足:$$

(a) $\Sigma^*\subset\Sigma$, $\overline{A\setminus B}\in\Sigma^*$, $\overline{\eta(A)}\in\Sigma^*$, 当 $A\in\Sigma^*$, $B\in\Sigma, \eta\in H^*$,

(b) $A\subset B\Rightarrow i^*(A)\leqslant i^*(B)$, $\forall A, B\in\Sigma^*$,

(c) $i^*(\overline{A\setminus B})\geqslant i^*(A)-i(B)$, $\forall A\in\Sigma^*$, $B\in\Sigma$,

(d) $i^*(\overline{\eta(A)})\geqslant i^*(A)$, $\forall A\in\Sigma^*$, $\forall\eta\in H^*$.

引入伪指标后，能推广定理 2.2 如下：

定理 2.3 在定理 2.2 的假设下，设 (Σ^*, i^*) 是关于 $T(G)$ 指标 i 的一个相对于 $\Phi_J^d(\mathbf{f})$，(或 $\Phi_J^h(\mathbf{f})$) 的伪指标，其中 $J=(a, b)$ 是一个给定的有穷区间. 令

$$c_m^*=\inf_{i^*(A)\geqslant m}\sup_{x\in A}\mathbf{f}(x), \quad m=1, 2, \cdots,$$

其中 $A\subset M$, $A\in\Sigma^*$; 倘若有

$$c=c_{m+1}^*=\cdots=c_{m+k}^*\in(a, b),$$

则 c 必是 $\mathbf{f}$ 的临界值，并且有 $i(K_c)\geqslant k$.

证明 和定理 1.4 类似. 只验证 $i(K_c)\geqslant k$.

由指标的连续性，有 K_c 的 $T(G)$ 不变闭邻域 $\tilde{N}$ 使得 $i(K_c)=i(\tilde{N})$. 令 $N=\tilde{N}\cap M$，则由单调性，

$$i(K_c)\leqslant i(N)\leqslant i(\tilde{N})\Rightarrow i(N)=i(K_c).$$

按 c 的定义，$\forall\varepsilon>0$，适合 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]\subset J$，$\exists A_\varepsilon\subset\mathbf{f}_{c+\varepsilon}$ 满足 $i^*(A_\varepsilon)\geqslant m+k$. 由定理 2.1，有等变的 $\eta\in\Phi_J^d(\mathbf{f})$ (或 $\Phi_J^h(\mathbf{f})$) 使得

$$\eta(A_\varepsilon\setminus\mathring{N})\subset\eta(\mathbf{f}_{c+\varepsilon}\setminus\mathring{N})\subset\mathbf{f}_{c-\varepsilon}.$$

于是有

$$\begin{aligned} m+k\leqslant i^*(A_\varepsilon)&\leqslant i^*(\overline{A_\varepsilon\setminus\mathring{N}})+i(N) && \text{(c)}\\ &\leqslant i^*(\overline{\eta(A_\varepsilon\setminus\mathring{N})})+i(K_c) && \text{(d)}\\ &\leqslant m+i(K_c) && \text{(按 } c \text{ 的定义)}. \end{aligned}$$

下面举几个伪指标的例子，说明如何由指标 i 构造伪指标 i^*.

例 1 (Σ, i)本身是关于任意$\Phi_J^h(\mathbf{f})$或$\Phi_J^h(\mathbf{f})$的伪指标.

例 2 设(Σ, i)是一个指标，$\widetilde{H}\subset H$是$\mathscr{X}$上的一个同胚群，$S\in\Sigma$是一个给定的闭集. 令,

$$i^*(A)=\inf_{h\in\widetilde{H}} i(h(A)\cap S)$$

则(Σ, i^*)关于任意$\Phi_J^h(\mathbf{f})$是伪指标.

证明 (a)显然，(b)由i的单调性直接推出.

(c) $$\begin{aligned} i^*(\overline{A\backslash B}) &= \inf_{h\in\widetilde{H}} i(h(\overline{A\backslash B})\cap S) \\ &\geqslant \inf_{h\in\widetilde{H}} i(\overline{h(A)\cap S\backslash h(B)}) \quad \text{(单调)} \\ &\geqslant \inf_{h\in\widetilde{H}} [i(h(A)\cap S)-i(h(B))] \quad \text{(次可加)} \\ &= \inf_{h\in\widetilde{H}} i(h(A)\cap S)-i(B) \quad \text{(超变 + } h \text{ 同胚)} \\ &= i^*(A)-i(B). \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} i^*(\eta(A)) &= \inf_{h\in\widetilde{H}} i(\eta\circ h(A)\cap S) \\ &\geqslant \inf_{h'\in H^*} i(h'(A)\cap S)=i^*(A), \end{aligned}$$

$\forall\eta\in\Phi_J^h$.

在以后的应用中，根据具体泛函，我们选取适当的集合S.

例 3 设Σ^*为Σ中一切紧子集组成的集合，设S是$\mathscr{X}$中任意$T(G)$不变子集，$J=[0, \infty)$. 令

$$\Lambda_*=\{h\in H \mid \text{同胚}, h(B_1)\subset\mathbf{f}^{-1}(J)\cup S\}$$

$$i^*(K)=\inf_{h\in\Lambda_*} i(K\cap h(\partial B_1)),$$

则(Σ^*, i^*)是相对于$\Phi_J^h(\mathbf{f})$的伪指标.

事实上，(a)显然，(b)由i的单调性推出.

(c) $$\begin{aligned} i^*(\overline{K\backslash B}) &= \inf_{h\in\Lambda_*} i(\overline{K\backslash B}\cap h(\partial B_1)) \\ &\geqslant \inf_{h\in\Lambda_*} i(\overline{K\cap h(\partial B_1)\backslash B}) \\ &\geqslant \inf_{h\in\Lambda_*} i(K\cap h(\partial B_1))-i(B) \quad \text{(次可加性)} \\ &= i^*(K)-i(B), \quad \forall K\in\Sigma^*, B\in\Sigma. \end{aligned}$$

(d) 先说明：若$\eta\in\Phi_J^h(\mathbf{f})$，则$\eta^{-1}: \Lambda_*\to\Lambda_*$. 事实上，若$h\in\Lambda_*$

则 $\eta^{-1}h$ 也是 $T(G)$ 等变连续的. 并且 $\eta^{-1}h(B_1)\subset\eta^{-1}(\mathbf{f}^{-1}(J)\cup S)\subset\eta^{-1}\circ\mathbf{f}^{-1}(J)\cup\eta^{-1}(S\cap\mathbf{f}_0)=(\mathbf{f}\circ\eta)^{-1}(J)\cup S\subset\mathbf{f}^{-1}(J)\cup S$, 这是因为

$$\mathbf{f}(\eta(x))\leqslant\mathbf{f}(x),\quad 以及\quad \eta|_{\mathbf{f}_0}=id|_{\mathbf{f}_0}.$$

于是, 当 $\eta\in\Phi_J^*(\mathbf{f})$ 时,

$$\begin{aligned}i^*(\eta(K))&=\inf_{h\in A_*}i(\eta(K)\cap h(\partial B_1))\\&=\inf_{h\in A_*}i(\eta(K\cap\eta^{-1}\circ h(\partial B_1)))\\&\geqslant\inf_{\eta^{-1}\circ h\in A_*}i(K\cap\eta^{-1}\circ h(\partial B_1))\\&\geqslant i^*(K).\end{aligned}$$

现在我们再来讨论由指标定义的

$$c_n=\inf_{i(A)\geqslant n}\sup_{x\in A}\mathbf{f}(x)$$

与水平集 $\mathbf{f}_a$ 间的关系. 有下列

定理 2.4

$$c_n=\inf\{a\in\mathbb{R}^1|i(\mathbf{f}_a)\geqslant n\},\quad n=1,2,\cdots.$$

证明 令 $b_n=\inf\{a\in\mathbb{R}^1|i(\mathbf{f}_a)\geqslant n\}$.

先证: $c_n\leqslant b_n$. 若有 a 使得 $i(\mathbf{f}_a)\geqslant n$, 则因

$$\sup_{x\in\mathbf{f}_a}\mathbf{f}(x)=a;$$

可见

$$c_n=\inf_{i(A)\geqslant n}\sup_{x\in A}\mathbf{f}(x)\leqslant a,$$

即得 $c_n\leqslant b_n$.

再证 $b_n\leqslant c_n$. 倘若不然, 有 $b_n>c_n$, 则 $\exists\alpha\in(c_n, b_n)$ 及 $A\in\Sigma$, $i(A)\geqslant n$ 使得

$$\sup_{x\in A}\mathbf{f}(x)<\alpha,$$

即 $A\subset\mathbf{f}_\alpha$. 按 i 的单调性, 有

$$i(\mathbf{f}_\alpha)\geqslant i(A)\geqslant n,$$

便与 b_n 的定义不符.

这定理表明临界值与水平集的拓扑结构有如下联系: $\alpha\mapsto i(\mathbf{f}_\alpha)$: $\mathbb{R}^1\to\mathbb{Z}_+\cup\{+\infty\}$ 是一个整值函数, 它的跳跃点就是 $\mathbf{f}$ 的临界值. 对任意区间 $[a, b]\subset\mathbb{R}^1$, 只要 $K\cap\mathbf{f}^{-1}[a, b]\cap\mathrm{Fix}_G=\emptyset$,

那么 $i(\mathbf{f}_b)-i(\mathbf{f}_a)$ 就是 $\mathbf{f}^{-1}[a,b]$ 上的临界点轨道个数的一个下界估计. 因为 $\forall n\in[i(\mathbf{f}_a)+1,\ i(\mathbf{f}_b)]$, 必有 $a\leqslant c_n\leqslant b$, 其中 c_n 是由(2.2)式定义的

引理 2.5 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$, 满足 P. S. 条件, 是 $T(G)$ 不变的, 并且 $\mathbf{f}(\theta)=0$. 设 r,s 都是正整数.

(1) 若有 V^{dr} 是 $T(G)$ 不变的 dr 维闭子空间, 以及 $\rho>0$ 使得 $\sup\limits_{x\in V^{dr}\cap S_\rho}\mathbf{f}(x)<0$, 其中 S_ρ 是半径为 ρ 的球面; 则

$$\lim_{b\to-0} i(\mathbf{f}_b)\geqslant r$$

(2) 若有 $T(G)$ 不变的 ds 维闭子空间 V^{ds}, 使得 $V^{ds}\cap\mathrm{Fix}_G=\{\theta\}$, 以及 $\inf\limits_{x\in(V^{ds})^\perp}\mathbf{f}(x)>-\infty$, 其中 $(V^{ds})^\perp$ 表示 V^{ds} 的在 $\mathscr{X}$ 中的直和补空间, 则

$$\lim_{a\to-\infty} i(\mathbf{f}_a)\leqslant s.$$

证明 (1) 因 $V^{dr}\cap S_\rho$ 紧, 故有 $c<0$ 使得 $V^{dr}\cap S_\rho\subset\mathbf{f}_c$, 然而 $\mathbf{f}_c$ 与 V^{dr} 都是 $T(G)$ 不变的闭集, 又有一个 $T(G)$ 等变的连续映射 φ: $V^{dr}\cap S_1\to V^{dr}\cap S_\rho$, 所以由指标的单调性与超变性, 以及 d 维数性质即得

$$i(\mathbf{f}_c)\geqslant i(V^{dr}\cap S_\rho)\geqslant i(V^{dr}\cap S_1)\geqslant r.$$

再由指标的单调性, 立得

$$\lim_{b\to-0} i(\mathbf{f}_b)\geqslant r.$$

(2) 由设 $\exists c<0$ 使得 $(V^{ds})^\perp\cap\mathbf{f}_c=\emptyset$. 而 V^{ds} 是 $T(G)$ 不变的, 从而 $(V^{ds})^\perp$ 也 $T(G)$ 不变. 应用性质 2.3, 立得 $i(\mathbf{f}_c)\leqslant s$.

定理 2.5 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$, 满足 P. S. 条件, 是 $T(G)$ 不变的, $\mathbf{f}(\theta)=0$, 适合 $K\cap\mathbf{f}^{-1}(-\infty,0)\cap\mathrm{Fix}_G=\emptyset$; 又设有一个 $T(G)$ 不变的, 具 d 维数性质的规范指标 i, 以及 $r>s$, 使得引理 2.5 的假设(1), (2)都成立. 则 $\mathbf{f}$ 至少有 $r-s$ 个不同的临界点轨道.

证明 由引理 2.5, 条件(1)蕴含了: $c_r<0$; 而(2)蕴含了 $\exists c>-\infty$, 当 $j>s$ 时, $c_j\geqslant c$; 于是

$$-\infty<c_{s+1}\leqslant c_{s+2}\leqslant\cdots\leqslant c_r<0.$$

应用定理 2.3 立得结论.

同理,对伪指标 i^*,也可以引入 $\mathbb{R}^1$ 上的整值函数:

$$a \mapsto \sup_{K\subset \mathbf{f}_a, K\in\Sigma^*} i^*(K).$$

我们也可以用这个函数的跳跃点和差

$$\sup_{K\subset \mathbf{f}_b, K\in\Sigma^*} i^*(K) - \sup_{K\subset \mathbf{f}_a, K\in\Sigma^*} i^*(K)$$

来估计 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]$ 上临界点轨道的下界.

§ 3 $\mathbb{Z}_2$ 群的指标

有了前节的一般指标理论以后,为了估计临界点的个数,问题便在于对给定的表示 $T(G)$,确定它的指标. 本节讨论 $\mathbb{Z}_2$ 群的不变指标——亏格(genus).

3.1 亏格

设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间,Σ 表示 $\mathscr{X}$ 上一切对称闭子集,即 $A\in\Sigma \Leftrightarrow -A=A$, A 闭. $G=\mathbb{Z}_2$ 有表示: $T_e=id$, $T_{-e}=-id$, 则 Σ 是 $T(G)$ 不变的.

我们来构造 $T(\mathbb{Z}_2)$ 的一个指标如下:

取 $H=\{h:\mathscr{X}\xrightarrow{\text{连续}}\mathscr{X} \mid 奇, 即 h(x)=-h(-x), \forall x\in\mathscr{X}\}$,

$$\gamma(A)=\begin{cases}\min\{n\in\mathbb{Z}_+ \mid \exists \text{ 奇、连续的 } \varphi: A\to\mathbb{R}^n\backslash\{\theta\}\}, \\ 0, \quad 当 A=\emptyset, \\ +\infty, \quad 当不存在 \varphi \text{ 奇连续}: A\to\mathbb{R}^n\backslash\{\theta\}, \forall n=1,2,\cdots,\end{cases}$$

称 γ 为 Σ 上的亏格. 将证:

引理 3.1 亏格 γ 是 Σ 上关于 $T(\mathbb{Z}_2)$ 不变的规范指标.

证明 逐条检验指标的定义(a)~(e).

(a) 是定义. (b) 显然.

(c) 次可加性. 设 $\gamma(A_i)=n_i$, $i=1,2$, 不妨设 $n_1, n_2<+\infty$. 这表明 $\exists\varphi_i: A_i\xrightarrow{\text{连续}}\mathbb{R}^{n_i}\backslash\{\theta\}$, $\varphi_i\in H$, $i=1,2$. 由 Tietze 定理, $\exists\hat{\varphi}_i\in C(\mathscr{X}, \mathbb{R}^{n_i})$ 适合 $\hat{\varphi}_i|_{A_i}=\varphi_i$. 令

$$\tilde{\varphi}_i(x)=\frac{1}{2}[\hat{\varphi}_i(x)-\hat{\varphi}_i(-x)],$$

则
$$\tilde{\varphi}_i(-x)=-\tilde{\varphi}_i(x),\quad \forall x\in\mathscr{X},$$

$$\tilde{\varphi}_i(x)=\frac{1}{2}[\varphi_i(x)-\varphi_i(-x)]=\varphi_i(x),\quad \forall x\in A_i,\ i=1,\ 2.$$

令
$$f(x)=(\tilde{\varphi}_1(x),\ \tilde{\varphi}_2(x)),$$

则 $f: A_1\cup A_2\to\mathbb{R}^{n_1+n_2}\setminus\{\theta\}$，并满足：$f(-x)=-f(x)$. 所以推出

$$\gamma(A_1\cup A_2)\leqslant n_1+n_2=\gamma(A_1)+\gamma(A_2).$$

(d) 超变性. 设 $A\in\Sigma$, $h\in H$，满足：$\gamma(\overline{h(A)})=n$；则 $\exists\varphi\in H$, $\varphi:\overline{h(A)}\xrightarrow{\text{连续}}\mathbb{R}^n\setminus\{\theta\}$. 令 $\psi=\varphi\circ h$，则 $\psi\in H$，并且 $\psi: A\xrightarrow{\text{连续}}\mathbb{R}^n\setminus\{\theta\}$. 推得 $\gamma(A)\leqslant n=\gamma(\overline{h(A)})$.

(e) 连续性. 设 A 紧，要证：$\exists\delta>0$ 使得

$$\gamma(N_\delta)=\gamma(A),$$

其中 $N_\delta=\{x\in\mathscr{X}\mid \text{dist}(x,\ A)\leqslant\delta\}$.

设 $\gamma(A)=n$，不妨设 $n<+\infty$，则 $\exists\varphi\in H$, $\varphi: A\xrightarrow{\text{连续}}\mathbb{R}^n\setminus\{\theta\}$，应用 Tietze 定理(及次可加性中的构造)，$\exists\tilde{\varphi}:\mathscr{X}\xrightarrow{\text{连续}}\mathbb{R}^n$，奇，且 $\tilde{\varphi}|_A=\varphi$. 因为 A 是紧的，且 $\theta\notin\tilde{\varphi}(A)$，所以有 $\delta>0$，使得 $\theta\notin\tilde{\varphi}(N_\delta)$，即

$$\tilde{\varphi}:\ N_\delta\to\mathbb{R}^n\setminus\{\theta\},$$

从而联合单调性得到：

$$n=\gamma(A)\leqslant\gamma(N_\delta)\leqslant n.$$

规范性 $\forall x\in\mathscr{X}$，轨道集 $[x]=\{x,\ -x\}$. 如今 $\text{Fix}\mathbb{Z}_2=\{\theta\}$，为了 $[x]\cap\text{Fix}\mathbb{Z}_2=\emptyset$，必须且仅须 $x\neq\theta$. 显然我们有

$$\gamma([x])\geqslant 1.$$

另一方面，作 $\varphi:\ [x]\to\mathbb{R}^1\setminus\{\theta\}$ 如下：

$$\varphi(x)=1,\quad \varphi(-x)=-1.$$

即得 $\gamma([x])\leqslant 1$.

现在我们还要证明亏格满足 1-维数性质，为此需要下列 Borsuk-Ulam 定理.

定理 3.1(Borsuk) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个含有原点 θ 的, 并关于 θ 对称的有界开集, $\mathbf{f}$: $\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ 是奇的连续映射, 即 $\mathbf{f}(-x)=-\mathbf{f}(x)$, $\forall x\in\overline{\Omega}$. 则当 $\theta\notin\mathbf{f}(\partial\Omega)$ 时, $\deg(\mathbf{f}, \Omega, \theta)=$奇数.

证明 1° 取 $\varepsilon>0$, 使得球 $B(\theta, \varepsilon)\subset\Omega$. 由 Tietze 定理, 存在连续映射 $\mathbf{f}_\varepsilon$: $\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ 满足

$$\mathbf{f}_\varepsilon(x)=\begin{cases}x, & x\in\overline{B}(\theta, \varepsilon),\\ \mathbf{f}(x), & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

当用 $\frac{1}{2}(\mathbf{f}_\varepsilon(-x)-\mathbf{f}_\varepsilon(-x))$ 代替 $\mathbf{f}_\varepsilon(x)$ 时, 它还是奇的. 按 Brouwer 度的同伦不变性,

$$\deg(\mathbf{f}, \Omega, \theta)=\deg(\mathbf{f}_\varepsilon, \Omega, \theta).$$

2° 为了计算后者, 利用度的区域可加性,

$$\deg(f_\varepsilon, \Omega, \theta)=\deg(f_\varepsilon, B(\theta, \varepsilon), \theta)+\deg(f_\varepsilon, \Omega\setminus\overline{B(\theta, \varepsilon)}, \theta).$$

这等式右端的第一项, 由度的规范性, 为 1. 而对第二项 $\deg(\mathbf{f}_\varepsilon, \Omega\setminus\overline{B}(\theta, \varepsilon), \theta)$, 只要证其为偶数. 定理的证明就完成了.

为证后者, 我们来找一个奇的、C^1 的映射 g 与 $\mathbf{f}_\varepsilon$ 任意接近, 并使 θ 为其正则值. 一旦这样的 g 存在, $g^{-1}(\theta)\cap(\Omega\setminus\overline{B}(\theta, \varepsilon))$ 的点的个数必是整数, 因为由对称性, 这种点总是成对出现的. 这归结为下列

引理 3.2 设 h: 是在 $\mathbb{R}^n$ 中一个关于 θ 对称的但不包含 θ 为内点的有界开集 Ω 的闭包 X 上定义的, 取值于 $\mathbb{R}^n$ 的奇映射; 则 $\forall\varepsilon>0$, 必有奇的 $g\in C^1(X, \mathbb{R}^n)$, 使得

$$\begin{cases}\|h-g\|_{C(X,\mathbb{R}^n)}<\varepsilon,\\ \theta \text{ 是 } g \text{ 的正则值.}\end{cases}$$

证明 1° 由 Weierstrass 定理, 不妨设 $h\in C^1(X, \mathbb{R}^n)$. 令

$$F(A, x)=h(x)+Ax,$$

其中 A 跑遍一切 $n\times n$ 矩阵集 $\mathbb{R}^{n^2}$. 我们要证: F: $\mathbb{R}^{n^2}\times X\to\mathbb{R}^n$ 与 $\{\theta\}$ 横截. 如其成立, 按第一章 §3 横截定理, 对 a. e. $A\in\mathbb{R}^{n^2}$, 都有

$g_A(x)=F(A, x)$满足 $g_A \pitchfork \{\theta\}$. 我们所要的 g 就由 g_A 给出.

2° 证明 $F \pitchfork \{\theta\}$. 事实上,

$$dF(A, x)(B, y)=h'(x)y+Ay+Bx, \quad \forall (B, y)\in \mathbb{R}^{n^2}\times\Omega.$$

由设 $x\neq\theta$, 则 $\forall z\in\mathbb{R}^n$, 取 $B=\frac{\langle x, \rangle}{\|x\|^2}z$, $y=\theta$, 就得到 $dF(A, x)\cdot(B, y)=z$; 所以 $dF(A, x)$是在上的, 即得 $F\pitchfork\{\theta\}$. 至此引理 3.2, 从而定理 3.1 都得证.

推论 3.1(Borsuk-Ulam) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个含有原点 θ 的, 关于 θ 对称的有界开集. 设 ψ: $\partial\Omega\to\mathbb{R}^m$, $m<n$, 而且是奇连续的; 则必存在 $p\in\partial\Omega$, 使得 $\psi(p)=\theta$.

证明 倘若不然, $\theta\notin\psi(\partial\Omega)$, 对于 ψ 的任意奇连续扩张 $\tilde{\psi}$: $\bar{\Omega}\to\mathbb{R}^m$, $\tilde{\psi}|_{\partial\Omega}=\psi$, 应用 Borsuk 定理, 得 $\deg(\tilde{\psi}, \Omega, \theta)=$奇数. 今取 $y_0\in\mathbb{R}^n\backslash\mathbb{R}^m$. 并且 $\|y_0\|$ 足够小, 应有

$$\deg(\tilde{\psi}, \Omega, y_0)=\deg(\tilde{\psi}, \Omega, \theta)\neq 0.$$

但因 $y_0\notin\tilde{\psi}(\bar{\Omega})$, 故 $\deg(\tilde{\psi}, \Omega, y_0)=0$. 这就导出了矛盾.

定理 3.2 亏格 γ 是一个具 1-维数性质的规范的 $T(\mathbb{Z}_2)$ 指标.

证明 结合引理 3.1 与推论 3.1 立得.

因此亏格还具有下列性质:

1° 设 $A\subset\mathbb{R}^n\backslash\theta$ 关于原点对称闭, 则 $\gamma(A)\leqslant n$.

2° 设 $\mathscr{X}=E_1\oplus E_2$, $\dim(E_1)=k$, $\gamma(A)>k$; 则 $A\cap E_2\neq\emptyset$.

3° 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, 有界、开、关于 θ 对称, 并且 $\theta\in\Omega$, $A\in\Sigma$, 奇同胚于 $\partial\Omega$; 则 $\gamma(A)=n$.

证明 其中 1°, 2° 分别是 §2 性质 2.2 与 2.3, 而 3° 则由 Borsuk-Ulam 定理直接推出. 事实上, 因有奇同胚 h: $\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 使 $h(A)=\partial\Omega$, 按亏格的超变性有 $\gamma(A)=\gamma(\partial\Omega)$. 按 1°, 有 $\gamma(\partial\Omega)\leqslant n$; 倘若 $k=\gamma(\partial\Omega)<n$, 将有 ψ: $\partial\Omega\to\mathbb{R}^k\backslash\{\theta\}$ 奇连续, 这与 Borsuk-Ulam 定理矛盾.

4° 对任意不含原点的对称紧集 K, $\gamma(K)<+\infty$.

5° 设 $\gamma(A)=k$, 且 $\theta\notin A$, 则 A 中至少含有 k 对不同的点.

3.2 临界点定理的应用(无约束泛函)

对$\mathbb{Z}_2$群有了具体的$T(\mathbb{Z}_2)$指标——亏格. 马上可以把定理2.2具体化,正是

定理3.3 设$\mathscr{X}$是一个Banach空间,M是$\mathscr{X}$中的C^{2-0}对称子流形,$\mathbf{f}\in C^1(M, \mathbb{R}^1)$是一个满足P.S.条件的偶函数,若令

$$c_m=\inf_{\gamma(A)\geq m}\sup_{x\in A\subset M}\mathbf{f}(x),\ m=1,\ 2,\ \cdots,$$

则(1)当$-\infty<c_m<+\infty$时,c_m是$\mathbf{f}$的临界值;(2)若$-\infty<c=c_{m+1}=\cdots=c_{m+k}<+\infty$时,$\gamma(K_c)\geq k$;(3)$c_m\leq c_{m+1}$.

然而用这办法确定出的临界值却有相当的限制,因为有

引理3.3 若$\mathbf{f}(\theta)=0$,并且c_n是有穷的,则$c_n\leq 0$.

证明 取S_ε为中心在θ,半径为$\varepsilon>0$的球面. 由定理3.2,$\gamma(S_\varepsilon)=\dim\mathscr{X}$. 又由$\mathbf{f}$的连续性,$\forall\delta>0$,$\exists\varepsilon>0$使得$S_\varepsilon\subset\mathbf{f}_\delta$;从而有

$$c_n=\inf_{\gamma(A)\geq n}\sup_{x\in A}\mathbf{f}(x)\leq\sup_{x\in S_\varepsilon}\mathbf{f}(x)\leq\delta,$$

当$n\leq\dim\mathscr{X}$,即得

$$c_n\leq 0.$$

按§2定理2.5,再引入两个量,称其为Clark量:

$$i_1(\mathbf{f})=\lim_{a\to-0}\gamma(\mathbf{f}_a),\quad i_2(\mathbf{f})=\lim_{a\to-\infty}\gamma(\mathbf{f}_a),$$

则$\mathbf{f}$至少有$i_1(\mathbf{f})-i_2(\mathbf{f})$对临界点.

这时定理2.5对应着

定理3.4 设$\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$,满足P.S.条件,又是偶函数,$\mathbf{f}(\theta)=0$. 则

(1) 若有m维线性子空间E,以及$\rho>0$使得

$$\sup_{x\in E\cap S_\rho}\mathbf{f}(x)<0,$$

则$i_1(\mathbf{f})\geq m$.

(2) 若有j维线性子空间$\widetilde{E}$,使得

$$\inf_{x\in\widetilde{E}^\perp}\mathbf{f}(x)>-\infty,$$

$\widetilde{E}^\perp$是$\widetilde{E}$的直和补空间;则$i_2(\mathbf{f})\leq j$.

(3) 若 $m>j$, (1) 与 (2) 都成立; 则 f 至少有 $m-j$ 对不同的临界点.

作为这个定理在微分方程中的应用, 考察第三章§4的 Landesman-Lazer 型定理.

$$\begin{cases} -\Delta u=\hat{\lambda} u+p(x, u), & x\in\Omega, \\ u|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是有界开区域, 有足够光滑的边界 $\partial\Omega$, $\hat{\lambda}$ 是 $-\Delta$ 在 0-Dirichlet 边条件下的一个本征值; 而 $p(x, t)\in C^\gamma(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^1)$, $0<\gamma<1$. 满足下列条件:

(P_1) ∃常数 M 使得

$$|p(x, t)|\leqslant M.$$

(P_2) 令 $P(x, t)=\int_0^t p(x, s)ds$, 满足

$$\int_\Omega P\left(x, \sum_{i=1}^N \alpha_i\varphi_i(x)\right)dx\to-\infty, \quad 当 \quad |\alpha|=\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\to\infty,$$

其中 $\mathrm{span}\{\varphi_1, \cdots, \varphi_N\}=\mathfrak{N}(-\Delta-\hat{\lambda}I)$.

(P_3) $\exists r>0$ 使得

$$P(x, t)>0 \quad 当 \quad (x, t)\in\bar{\Omega}\times[0, r].$$

(P_4) $p(x, t)$对 t 是奇函数.

定理 3.5 设 $p(x, t)\in C^\gamma$, 满足(P_1)~(P_4), 则方程(3.1)至少有 $N=\dim\mathfrak{N}(-\Delta-\hat{\lambda}I)$对不同的解.

证明 只需考察下列泛函:

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega[(\nabla u)^2-\hat{\lambda}u^2]-\int_\Omega P(x, u), \quad u\in H_0^1(\Omega)$$

的临界点的对数. 它是 C^1 偶的, 并满足 P. S. 条件(参看第三章定理4.1). 现在应用定理 3.4 来估计临界点的对数. 取

$$\tilde{E}=\bigoplus_{j=1}^{k-1}E_j,$$

其中 E_j 是 $H_0^1(\Omega)$中对应于 λ_j 的本征子空间, $j=1, 2, \cdots$, 而 $\sigma(-\Delta)=\{\lambda_1<\lambda_2<\cdots\}$, $\hat{\lambda}=\lambda_k$; 则 $\tilde{E}^\perp=\bigoplus_{j=k}^{\infty}E_j$. 用 P 表示到 E_k

的正交投影，$P^+(P^-)$表示到$\bigoplus_{j>k}E_j(\bigoplus_{j<k}E_j)$的正交投影，则在$\tilde{E}^\perp$上，

$$\begin{aligned}J(u)&=\frac{1}{2}\int_\Omega[(\nabla u)^2-\hat{\lambda}\nabla Ku\cdot\nabla u]\\&\quad-\int_\Omega[P(x,u)-P(x,Pu)]-\int_\Omega P(x,Pu)\\&\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|P^+u\|^2-M\int_\Omega|P^+u|-\int_\Omega P(x,Pu)\\&\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|P^+u\|^2-\frac{M}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}\operatorname{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}}\|P^+u\|\\&\quad-\int_\Omega P(x,Pu),\end{aligned}$$

其中$K=(-\Delta)^{-1}$，而$\|\cdot\|$是$H_0^1(\Omega)$模，由假设(P_1)，(P_2)，推出：$J((P^++P)u)$有下界$b>-\infty$.

令$E=\bigoplus_{j=1}^k E_j$，再证$\exists\delta>0$，使得$A=E\cap S_\delta\subset\mathring{J}_0$. 因为$H_0^1(\Omega)$模与$C(\bar{\Omega})$模在$E$上是等价的，所以取$\delta>0$，使得

$$\|u\|_{H_0^1}<\delta\Rightarrow\|u\|_C\leqslant r,\quad\forall u\in E$$

即得
$$J(u)\leqslant-\int_\Omega P(x,u)<0,\quad\forall u\in E\cap S_\delta.$$

注意到
$$\gamma(A)=\sum_{j=1}^k\dim(E_j),$$

按定理3.4，J至少有

$$\gamma(A)-\operatorname{codim}(\tilde{E}^\perp)=\dim(E_k)=N$$

对不同的临界点.

3.3 伪指标的应用

把§2.3例3中定义的伪指标具体化如下：

$$i^*(K)=\inf_{h\in\Lambda_\rho}\gamma(K\cap h(\partial B_1)),$$

$$\Lambda_*^{(\rho)}=\{h\in C(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)\,|\,\text{奇同胚},h(B_1)\subset\mathbf{f}^{-1}(0,\infty)\cup B_\rho\},$$

其中$\rho>0$，而K是关于θ对称的紧集. 我们有

定理3.6 设$\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$满足P.S.条件，是偶的，

(1) 若$\exists \rho_0$, $\alpha>0$以及k维线性子空间E, 使得$\mathbf{f}|_{E^{\perp}\cap S_{\rho_0}}\geqslant\alpha$; 则$c_n^*\geqslant\alpha$当$n>k$.

(2) 若$\exists\, m$维线性子空间$\tilde{E}$, 及$R>0$使得$\mathbf{f}(x)\leqslant 0$, $\forall x\in\tilde{E}\setminus B_R$; 则$c_n^*<+\infty$当$n\leqslant m$.

(3) 若$m>k$, 且(1), (2)都成立; 则$\mathbf{f}$至少有$m-k$对不同的临界点.

其中
$$c_n^*=\inf_{i^*(K)\geqslant n}\sup_{x\in K}\mathbf{f}(x).$$

证明 (1) 设K是一个对称紧集. $i^*(K)>k$. 取$h=\rho_0 id$, 则$h\in\Lambda_*(\rho_0)$, 且有
$$\gamma(K\cap S_{\rho_0})=\gamma(K\cap h(\partial B_1))>k.$$
应用定理3.2后的性质2°立得: $K\cap S_{\rho_0}\cap E^{\perp}\neq\emptyset$. 从而有
$$\sup_{x\in K}\mathbf{f}(x)\geqslant\inf_{x\in E^{\perp}\cap S_{\rho_0}}\mathbf{f}(x)\geqslant\alpha,$$
即得$c_n^*\geqslant\alpha$当$n>k$.

(2) 取$K=\tilde{E}\cap B_R$, 则有
$$K\supset\tilde{E}\cap(\mathbf{f}^{-1}(0,\infty)\cup B_\rho)\supset\tilde{E}\cap h(B_1),$$
$$\forall h\in\Lambda_*(\rho);\ \rho\in(0,R),$$
从而
$$K\cap h(\partial B_1)\supset\tilde{E}\cap h(\partial B_1)\supset\partial(\tilde{E}\cap h(B_1)).$$
按定理3.2之后性质3°以及亏格的单调性,
$$\gamma(K\cap h(\partial B_1))\geqslant\gamma(\partial(\tilde{E}\cap h(B_1)))\geqslant m.$$
所以集类$\Gamma_m=\{K\mid\subset\mathscr{X}$对称紧, $i^*(K)\geqslant m\}\neq\emptyset$, 即得$c_{n-1}^*\leqslant c_n^*<+\infty$, 当$n\leqslant m$.

(3) 当$m>k$时, 取$\Lambda_*(\rho_0)$时, 即有
$$\alpha<c_{k+1}^*\leqslant\cdots\leqslant c_m^*<+\infty.$$
应用定理2.3, 即得至少$m-k$对不同的临界点.

和定理3.4适成对照, 这里的临界值都是正的, 正因为如此, 伪指标将被广泛采用.

推论3.2(Ambrosetti-Rabinowitz; 对称形式的山路定理) 设$\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$, 满足P.S.条件, 偶, 又设

(1) $\exists\rho$, $\alpha>0$以及有穷维子空间E, 使得

$$\mathbf{f}|_{E\cap S_\rho}\geqslant\alpha.$$

(2) ∃一列子空间 $\widetilde{E}_j$, $\dim(\widetilde{E}_j)=j$, 以及 $R_j>0$ 使得

$$\mathbf{f}(x)\leqslant 0\quad \forall x\in\widetilde{E}_j\backslash B_{R_j},\quad j=1,2,\cdots.$$

则 $\mathbf{f}$ 有无穷多对不同的临界点, 对应着正临界值.

作为推论 3.2 的一个应用, 考察下列方程:

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,u), & 于\ \Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{3.1'}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界的, 足够光滑边界的开区域, 而函数 f 满足条件

(F_1) $\mathbf{f}: \overline{\Omega}\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 局部 Lip. 连续;

(F_2) ∃常数 $c_1, c_2\geqslant 0$ 及 $1<\alpha<\dfrac{n+2}{n-2}$, 当 $n\geqslant 3$ 使

$$|\mathbf{f}(x,t)|\leqslant c_1+c_2|t|^\alpha,\qquad \forall (x,t)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^1;$$

(F_3') $\exists\theta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 及 $M>0$ 使得

$$0<F(x,t)\triangleq\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s\leqslant\theta t f(x,t),\quad 当\quad |t|\geqslant M;$$

(F_4) $\mathbf{f}(x,t)=-f(x,-t)$, $\forall (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^1$.

定理 3.7 在假设(F_1)(F_2), (F_3)和(F_4)之下, 方程(3.1)′有无穷多对解. 并且(3.1)′对应的泛函有一个无界的临界值序列.

证明 在空间 $\mathscr{X}=H_0^1(\Omega)$ 上考察泛函

$$J(u)=\int\frac{(\nabla u)^2}{2}-F(x,u).$$

它的 C^1 连续性, 以及 P. S. 条件均已在第三章定理 3.1 中验证过了. 而且容易看出 J 还是一个偶泛函. 记 $\{\phi_1,\cdots,\phi_m,\cdots\}$ 为在 0-Dirichlet 条件下, $-\Delta$ 对应于本征值 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_m\leqslant\cdots$ 的本征向量. 并记 $\mathscr{X}_j=\mathrm{span}\{\phi_1,\cdots,\phi_j\}$, $\mathscr{X}_j^\perp$ 为其正交补

由条件(F_2)推得常数 $C_3, C_4>0$ 使

$$|F(x,t)|\leqslant C_3+C_4|t|^{\alpha+1}.$$

所以有

$$J(u)\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1}-C_4\|u\|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}}-C_3,\tag{3.2}$$

C_5 是一个常数. 利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\|u\|_{L^{\alpha+1}}\leqslant C_6\|u\|_{H_0^1}^{\beta}\,\|u\|_{L^2}^{1-\beta} \tag{3.3}$$

其中 C_6 是一个常数, 而 $0<\beta<1$ 满足

$$\frac{1}{\alpha+1}=\beta\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)+(1-\beta)\frac{1}{2}.$$

将(3.3)代入(3.2)得到常数 C_7, 使得当 $u\in\partial B_\rho$, 即 $\|u\|_{H_0^1}=\rho$ 时,

$$J(u)\geqslant\frac{1}{2}\rho^2-C_7\rho^{(\alpha+1)\beta}\|u\|_{L^2}^{(1-\beta)(\alpha+1)}-C_5$$

当 $u\in\mathscr{X}_j^\perp$ 时, 按本征值的变分性质

$$\|u\|_{L^2}\leqslant\lambda_{j+1}^{-\frac{1}{2}}\|u\|,$$

从而有

$$J(u)\geqslant\frac{1}{2}(1-2C_7\rho^{\alpha-1}\lambda_{j+1}^{\delta})\rho^2-C_5, \tag{3.4}$$

当 $u\in\partial B_\rho\cap\mathscr{X}_j^\perp$, 其中 $\delta=-\frac{1}{2}(1-\beta)(1+\alpha)<0$. 因为 $\lambda_k\to+\infty$ 当 $k\to\infty$, 所以可以取到 ρ 和 j_0 使

$$\begin{cases}1-2C_7\rho^{\alpha-1}\lambda_{j_0+1}^{\delta}\geqslant\dfrac{1}{2},\\ \rho^2>8C_5,\end{cases}$$

即得　　$$J(u)\geqslant\frac{1}{8}\rho^2>0,\quad\forall u\in\partial B_\rho\cap\mathscr{X}.$$

再验证推论 3.2 中的第(2)个条件. 固定在任意有穷维空间 $\mathscr{X}_j$ 上看, 因为任意模都是等价的, 如今因为有条件(F_3), 即 f 是超线性的(对 t); 得

$$F(x,t)\geqslant C_1|t|^{\frac{1}{\theta}}-C_2,\quad 当\ |t|\geqslant M,$$

其中 C_1, C_2 是正常数. 于是有 $R_j>\rho$ 使得

$$J(u)\leqslant 0,\quad\forall u\in\mathscr{X}_j\backslash B_{R_j}.$$

应用推论 3.2 即得无穷多对不同临界点.

最后, 再证有无穷多个不同的 $\to+\infty$ 的临界值, 因为我们知道

$$c_m^*=\inf_{i^*(A)\geqslant m}\sup_{u\in A}J(u),$$

其中 A 是 $\mathscr{X}$ 中不含 θ 的对称紧子集,

$$i^*(A)=\inf_{h\in\Lambda_*}\gamma(A\cap h(\partial B_1))$$

$\Lambda_*=\{h\in C(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)\mid$ 奇、同胚, $h(B_1)\subset J^{-1}(0,\infty)\cup B_\rho\}$. 每个 $\rho>0$ 决定一个伪指标 i^*, 从而决定出一串临界值 c_m^*. c_m^* 与 ρ 的关系可由定理 2.6 证明中的方法得到估计: 只要 $i^*(A)\geqslant m>j$, 就有 $A\cap\partial B_\rho\cap\mathscr{X}_j^\perp\neq\emptyset$, 从而连系不等式(3.4)还有

$$c_{j+1}^*\geqslant\inf_{u\in\partial B_\rho\cap\mathscr{X}_j^\perp}J(u)\geqslant\frac{\rho^2}{2}-C_7\rho^{\alpha+1}\lambda_{j+1}^\delta-C_5.$$

固定 j, 取最佳的 ρ, 因为

$$\max_{\rho>0}\left\{\frac{\rho^2}{2}-C_7\rho^{\alpha+1}\lambda_{j+1}^\delta\right\}\geqslant C_8\lambda_{j+1}^{\frac{n+2-(n-2)\alpha}{2(\alpha-1)}}.$$

所以得到一列临界值 $c_j^*\to+\infty$ 随 $j\to\infty$:

$$c_j^*\geqslant C_8\lambda_j^{\frac{n+2-(n-2)}{2(\alpha-1)}}-C_5.$$

作为满足条件(F_1), (F_2), (F_3)与(F_4)的典型例子, 取 $f(x,u)=|u|^{\alpha-1}u$, $\alpha<\frac{n+2}{n-2}$, 于是方程:

$$\begin{cases}-\Delta u=|u|^{\alpha-1}u & 于\ \Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

有无穷多对解.

再来考察波方程的多重解.

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}+g(t,x;u)=0,\\ (t,x)\in Q=(0,2\pi)\times(0,\pi),\\ u(t,0)=u(t,\pi)=0,\quad t\in(0,2\pi),\\ u(t,x)=u(t+2\pi,x).\end{cases}\tag{3.5}$$

在这里, 我们假设如第二章 § 5, 只是再设 g 关于 u 还是奇函数, 正是

$(\mathrm{G}_1)^*$ $g\in C(\bar{Q}\times\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1)$, 对 u 严格上升, 而且有

$$g(t,x;-u)=-g(t,x,u),\qquad g(t,x,0)=0.$$

(G_2) 令 $G(t,x;u)=\int_0^u g(t,x;s)\,ds$, 存在正常数 C 及 α 使

得

$$\frac{1}{2}ug(t, x; u)\geqslant\alpha g(t, x; u)+G(t, x; u)-C,$$

且 $$\lim_{|u|\to\infty}\frac{g(t, x; u)}{u}=+\infty, \quad 按\ (t, x)\in Q\ 一致.$$

$$(\mathrm{G}_3)\qquad \lim_{u\to 0}\frac{g(t, x; u)}{u}=0, \quad 按\ (t, x)\in Q\ 一致.$$

在这假设下，我们要证(3.5)有无穷多对不同的 L^∞ 解.

和第三章，定理 3.3 一样，先考虑较简单的增涨情形. 即加强假设，$\exists b>0,\ \theta\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$，使得

$$(\mathrm{G}_2)'\ \lim_{u\to+\infty}\frac{g(t, x, u)}{u^{\frac{1}{\theta}-1}}=b, \forall(t, x)\in\bar{Q}\ 一致的情形.$$

这时，问题化归为求泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}\langle\tilde{K}v, v\rangle+\int_Q H(t, x; v),\quad v\in L^{p'}(Q)\cap\mathfrak{N}(\square)^\perp$$

的临界点(符号参看 § 5).

这个泛函的可微性，以及 P. S. 条件，都已验证过. 在应用山路定理时，还证明了 $\exists\alpha_0$ 及 $\rho>0$ 使得:

$$J|_{S_\rho}\geqslant\alpha_0.$$

由于 g 对 u 是奇函数，从而 G 对 u 是偶函数. 于是 H，从而 J 都是偶的.

为了证明 J 有无穷多对不同的临界点，只须再验证：$\forall$ 正整数 j，$\exists j$ 维线性子空间 E_j 和 $R_j>0$，使得 $J(v)\leqslant 0,\ \forall u\in E_j\backslash B_{R_j}$.

为此考察算子 $\tilde{K}$ 的一切负本征值:

$$\mu_{-1}\leqslant\mu_{-2}\leqslant\cdots<0.$$

设 $\varphi_{-1}, \varphi_{-2}, \cdots$ 为对应的本征向量. 取

$$E_j=\operatorname{span}\{\varphi_{-1}, \cdots, \varphi_{-j}\},$$

那么当 $v\in E_j$ 时

$$J(v)\leqslant\frac{\mu_{-j}}{2}\|v\|_{L^2}^2+C_1\int|v|^{p'}+C_2.$$

注意到在有穷维空间上，一切模等价，而 $p'<2$, $\mu_{-j}<0$; 所以必有

$R_j>0$，当 $v\in E_j\backslash B_{R_j}$ 时，

$$J(v)\leqslant 0.$$

于是有

引理 3.4　设 g 满足$(G_1)^*$，$(G_2)'$ 以及(G_3)；则方程(3.5)至少有无穷多对不同的 L^∞ 弱解.

现在回到原始的问题(3.5). 和第三章§3一样，考察截断函数，$\forall M>0$，令 $p=\frac{1}{\theta}$，以及

$$g_M(t, x; u)=\begin{cases} g(t, x; M)+(u-M)^{p-1}g(t, x; M)^{p-1}, & u>M, \\ g(t, x, u), & |u|\leqslant M, \\ g(t, x; -M)-|u+M|^{p-1}|g(t, x; -M)|^{p-1}, & \\ \qquad u<-M. & \end{cases}$$

对应地有 G_M，J_M，H_M 及 h_M 和以前一样，还是要证：当 M 足够大时，截断问题的解就是(3.5)的解. 新遇到的问题是要找无穷多个解，就要让 $M\to+\infty$，并设法把不同的解区别开来. 为此考察依赖于 M 的

$$c_n^*(M)=\inf_{i^*(A)\geqslant n}\sup_{v\in A}J_M(v),$$

它对应着临界点 $\pm v_{M,n}$，从而对应着函数

$$\pm u_{M,n}=h_M(t, x; \pm v_{M,n}).$$

我们将证：对于任意固定的 n，与 $c_n^*(M)$对应的 $u_{M,n}$ 有不依赖于 M 的 L^∞ 上界，例如说 $\|u_{M,k}\|_{L^\infty}\leqslant M_n$ 当 $k=1, 2, \cdots, n$. 这样一来，不但 $u_{M,k}$ 是(3.5)的解，而且，当 $M>M_n$ 时，$\{u_{M,k}\}_1^n$ 就对应着临界值：$c_1^*(M)\leqslant\cdots\leqslant c_k^*(M)\leqslant\cdots\leqslant c_n^*(M)$. 这样的临界点至少有 n 个不同的对.

为证 $u_{M,n}$ 有不依赖于 M 的 L^∞ 界，注意到

$$u_{M,n}=h_M(t, x; v_{M,n}).$$

和第三章定理 3.4 的证明一样，我们只需验证：$v_{M,n}$ 有不依赖于 M 的 L^2 模.

在第三章定理 3.4 中，我们已经证明了：

$$H_M(t, x, v)-\frac{1}{2}vh_M(t, x; v)\geqslant\frac{1}{2}\alpha|v|-C, \qquad (3.6)$$

其中 α、C 是假设(G_2)中的常数，以及 $\forall\varepsilon>0$，$\exists C_\varepsilon>0$ 使

$$H_M(t, x; v)\leqslant\varepsilon v^2+C_\varepsilon.$$

取 $\varepsilon_n<-\frac{\mu_{-n}}{2}$，则有 $C_n>0$ 使得

$$\begin{aligned}c_n^*(M)&\leqslant\max_{v\in E_n\cap B_{R_n}}J_M(v)\\&\leqslant\frac{1}{2}\mu_{-n}\max_{v\in E_n\cap B_{R_n}}\|v\|_{L^2}^2+\varepsilon_n\max_{v\in E_n\cap B_{R_n}}\|v\|_{L^2}^2+C_n\\&\leqslant C_n' \quad \text{一个常数.}\end{aligned}$$

又因为 $v_{M,n}$ 是 $J_M(v)$ 的临界点，所以

$$\widetilde{K}v_{M,n}+h_M(t, x; v_{M,n})=x\in\mathfrak{N}(\Box)^\perp.$$

再用不等式(3.6)得到与 M 无关的常数 $C_n''>0$ 使得

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}\int|v_{M,n}|&\leqslant C+\frac{1}{2}\langle\widetilde{K}v_{M,n}, v_{M,n}\rangle+\int H_M(t, x; v_{M,n})\\&=C+J_M(v_{M,n})=C+c_n^*(M)\leqslant C_n''.\end{aligned}$$

联合引理 3.4，即得

定理 3.8 设$(G_1)^*(G_2)$与(G_3)成立；则方程(3.5)有无穷多对不同的 L^∞ 弱解.

3.4 非线性本征值问题

线性本征值问题，曾被看成为二次型的变分问题. 设 A 是一个 $n\times n$ 对称阵，本征值问题是求 λ 使得

$$Ax=\lambda x,\quad x\in\mathbb{R}^n$$

有非 θ 解. 它的变分提法是求二次函数

$$\mathbf{f}(x)=\frac{1}{2}(Ax, x)$$

在单位球面 S_1 上的临界点. 事实上，令 $\widetilde{\mathbf{f}}=\mathbf{f}|_{S_1}$，则

$$d\widetilde{\mathbf{f}}(x)=\mathbf{f}'(x)-(\mathbf{f}'(x), x)x.$$

为了 $x_0\in S_1$ 满足 $d\widetilde{\mathbf{f}}(x_0)=\theta$，必须且仅须

$$\mathbf{f}'(x_0)=\lambda x_0,$$

其中

$$\lambda=(\mathbf{f}'(x_0), x_0)$$

就是约束变分问题的 Lagrange 乘子. 一般非线性本征值问题的

变分方法已在第二章§3例3中介绍过. 不过这一节要考虑的是更深入一点的问题——非线性本征值的重数.

设给定 $\mathscr{X}$ 是一个实可分的 Hilbert 空间, $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$ 是偶的. 和线性本征值问题一样, 把 $\mathbf{f}$ 限制在单位球面 S_1 上, $\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{f}|_{S_1}$, 考察 $\tilde{\mathbf{f}}$ 的临界点的对数.

自然要问: 对 $\mathbf{f}$ 添加什么条件可以使 $\tilde{\mathbf{f}}$ 具有 P. S. 条件?

引理 3.5 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$, 又设 $\mathbf{f}'$ 是全连续的, 即 $x_n\rightharpoonup x \Rightarrow \mathbf{f}'(x_n)\to\mathbf{f}'(x)$; 则 $\mathbf{f}$ 也是全连续的.

证明 若不然, $\exists\varepsilon>0$ 及 $\{x_n\}$ 使得

$$\begin{cases} x_n\rightharpoonup x_0, \\ |\mathbf{f}(x_n)-\mathbf{f}(x_0)|\geqslant\varepsilon. \end{cases}$$

但

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(x_n)-\mathbf{f}(x_0)| &= (\mathbf{f}'(x_0+t(x_n-x_0)),\ x_n-x_0) \\ &\qquad\qquad t\in(0,1) \\ &= (\mathbf{f}'(x_0),\ x_n-x_0)+([\mathbf{f}'(x_0+t(x_n-x_0)) \\ &\quad -\mathbf{f}'(x_0)],\ x_n-x_0)\to 0. \end{aligned}$$

即得矛盾.

引理 3.6 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$ 满足

(1) $\mathbf{f}'$ 是全连续的;

(2) $\mathbf{f}(x)\neq 0\Rightarrow\mathbf{f}'(x)\neq\theta$;

则 $\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{f}|_{S_1}$ 满足 $(\mathrm{P.S.})^{\pm}$ 条件.

证明 只证 $(\mathrm{P.S.})^-$ 因为 $(\mathrm{P.S.})^+$ 可以用 $-\tilde{\mathbf{f}}$ 代 $\tilde{\mathbf{f}}$ 化到 $(\mathrm{P.S.})^-$ 设 $x_n\in S_1$, $-C\leqslant\mathbf{f}(x_n)\leqslant-\alpha<0$, 以及 $d\tilde{\mathbf{f}}(x_n)\to 0$, $n\to\infty$. 要证 $\{x_n\}$ 中有强敛子列.

事实上, 因为有子列 $x_{n_i}\rightharpoonup x_0$, 由条件(1)及引理 3.5, 得 $\mathbf{f}(x_{n_i})\to\mathbf{f}(x_0)$. 从而 $\mathbf{f}(x_0)\leqslant-\alpha<0$, 再用条件(2), $\mathbf{f}'(x_0)\neq\theta$.

按假设

$$d\tilde{\mathbf{f}}(x_{n_i})=\mathbf{f}'(x_{n_i})-(\mathbf{f}'(x_{n_i}),\ x_{n_i})x_{n_i}\to\theta.$$

由条件(1), $\qquad (\mathbf{f}'(x_{n_i}),\ x_{n_i})\to(\mathbf{f}'(x_0),\ x_0)$,

推出 $\qquad \|\mathbf{f}'(x_{n_i})\|^2-|(\mathbf{f}'(x_{n_i}),\ x_{n_i})|^2\to 0;$

所以 $$|(\mathbf{f}'(x_0),\ x_0)| = \|\mathbf{f}'(x_0)\| \neq 0.$$

于是， $$x_{n_i} - \frac{\mathbf{f}'(x_{n_i})}{(\mathbf{f}'(x_{n_i}),\ x_{n_i})} \to \theta,$$

即得 $x_{n_i} \to (\mathbf{f}'(x_0),\ x_0)^{-1}\mathbf{f}'(x_0) = \pm\|\mathbf{f}'(x_0)\|^{-1}\mathbf{f}'(x_0) \in S_1.$

引理 3.7 设 $\mathbf{f} \in C^1(\mathscr{X},\ \mathbb{R}^1)$ 是全连续的，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = N(\varepsilon)$，使得

$$\sup_{x \in B_1} |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(P_n x)| < \varepsilon, \quad \text{当 } n > N,$$

其中 P_n 是到 $\mathrm{span}\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}$ 的正交投影，而 $\{e_1,\ e_2,\ \cdots\}$ 是 $\mathscr{X}$ 上的一组正交基.

证明 若不然，$\exists \varepsilon_0 > 0$ 及 $x_n \in B_1$，使得

$$|\mathbf{f}(x_n) - \mathbf{f}(P_n x_n)| \geq \varepsilon_0, \quad n = 1,\ 2,\ \cdots,$$

因为有子列 $x_{n_i} \rightharpoonup x^*$ 以及 $P_{n_i} x_{n_i} \rightharpoonup x_0$. 我们将证：$x^* = x_0$. 事实上，

$$\lim_{i\to\infty} \|(I - P_{n_i})(x^* - x_0)\| = 0$$

推出

$$\|x^* - x_0\|^2 = (x^* - x_0,\ x^* - x_0) = \lim_{i\to\infty}(x_{n_i} - P_{n_i}x_{n_i},\ x^* - x_0)$$
$$= \lim_{i\to\infty}(x_{n_i},\ (I - P_{n_i})(x^* - x_0)) = 0.$$

但 $$|\mathbf{f}(x^*) - \mathbf{f}(x_0)| \geq \varepsilon_0,$$

这当然是不可能的.

定理 3.9 设 $\mathscr{X}$ 是一个实可分 Hilbert 空间，$\mathbf{f} \in C^1(\mathscr{X},\ \mathbb{R}^1)$ 满足条件：

(1) $\mathbf{f}'$ 是全连续的,

(2) $\mathbf{f}(x) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{f}'(x) \neq \theta$,

(3) $\mathbf{f}(\theta) = 0$, $\mathbf{f}(x) < 0$ 当 $x \neq \theta$,

(4) $\mathbf{f}(-x) = \mathbf{f}(x)$,

则 $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}|_{S_1}$ 有 $\dim \mathscr{X}$ 对不同的临界值. 而当 $\dim \mathscr{X} = \infty$ 时，有临界值 $c_n \to 0$.

证明 按引理 3.6，$\tilde{\mathbf{f}}$ 满足(P. S.)条件. 又因为 S_1 是弱列紧的，而 $\mathbf{f}$ 全连续(引理 3.5)，所以 $\tilde{\mathbf{f}}$ 有界. 定义

$$c_n = \inf_{\substack{\gamma(A)\geqslant n \\ A\subset S_1}} \sup_{x\in A} \mathbf{f}(x), \quad n=1, 2, \cdots;$$

则必有 $-\infty < c_n < 0$. 当 $n \leqslant \dim \mathscr{X}$. 按定理 3.3 立得结论.

再证 $c_n \to 0$. 若不然, $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及 A_n 闭对称 $\subset S_1$, 满足 $\gamma(A_n) \geqslant n$, 但 $\sup\limits_{x\in A_n} \mathbf{f}(x) < -\varepsilon_0$. 应用引理 3.7, $\exists$ 正整数 N_0 使得 $\sup\limits_{x\in B_1} |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(P_m x)| < \varepsilon_0/2, \forall m \geqslant N_0$. 从而 $\sup\limits_{x\in A_n} |\mathbf{f}(P_m(x))| > \frac{\varepsilon_0}{2}$, 于是 $P_m A_n$ 不含点 θ. 便有连续映射 $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$: $P_m A_n \to S^{m-1}$. 这蕴含了

$$n \leqslant \gamma(A_n) \leqslant \gamma(P_m A_n) \leqslant m = N_0, \quad n=1, 2, \cdots;$$

这是一个矛盾.

作为对椭圆型本征值问题的应用. 考察方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(x, u), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开区域, 具有光滑的边界, λ 是一个实参数, 而 $g \in C^\gamma(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $0 < \gamma < 1$, 满足下列条件:

(g_1) $|g(x, t)| \leqslant C_1 + C_2 |t|^\alpha$, $1 \leqslant \alpha < \frac{n+2}{n-2}$, 当 $n \geqslant 3$,

(g_2) $g(x, t) = -g(x, -t)$,

(g_3) $g(x, t)t > 0$. 当 $t \neq 0$.

在空间 $H_0^1(\Omega)$ 的单位球面上, 考察泛函

$$J(u) = -\int_\Omega G(x, u),$$

其中

$$G(x, t) = \int_0^t g(x, s)\mathrm{d}s.$$

$(g_1) \Rightarrow J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}^1)$, $(g_2) \Rightarrow J$ 是偶的, 而 (g_3) 蕴含了 $J(u) < 0$ 当 $u \neq 0$, 以及 $J'(u) \neq \theta \Leftrightarrow u \neq \theta$. 从而 J 满足定理 3.9 中的条件 (2) ~ (4). 剩下验证 (1). 注意到

$$\begin{aligned} (J'(u), v) &= -\int_\Omega g(x, u) \cdot v \\ &= -(Kg(x, u), v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

其中 $K=(-\Delta)^{-1}$；所以 J' 是全连续的.

定理 3.10 设 $g\in C^{\gamma}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$, $0<\gamma<1$, 满足 $(g_1)\sim(g_3)$；则 $\forall r>0$, 方程(3.8)有 ∞ 多对不同的解$(\lambda_m(r), \pm u_m(r))$ 满足：$\|u_m(r)\|_{H_0^1}=r$, $m=1, 2, \cdots$.

证明 直接应用定理 3.9. 只须注意一点：条件(g_3)蕴含了 Lagrange 乘子不为零.

§4 S^1 群的指标

平行于上节，现在我们来建立 S^1 群的不变指标. 并以判定 Hamilton 方程组的周期轨道的个数为其应用.

4.1 S^1 指标

设 $\mathscr{X}$ 是一个 Banach 空间. $S^1=\{e^{i\theta}|\theta\in[0, 2\pi)\}$是以普通乘法构成的紧李群. 设 $T: S^1\to\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$是一个等距在上表示.

记 $\Sigma=\{A\subset\mathscr{X}\,|\,A$ 是 $T(S^1)$不变的闭子集$\}$.

$\mathscr{H}=\{h: \mathscr{X}\to\mathscr{X}$ 连续，且 $T(S^1)$等变，即

$$h\circ T_g=T_g\circ h\quad\forall g\in S^1\}.$$

定义

$$\gamma(A)=\min\{k\in\mathbb{Z}_+|\exists\phi\in C(A, \mathbb{C}^k\backslash\{\theta\}), \exists n\in\mathbb{Z}_+ \text{ 满足：}$$
$$\phi(T_\theta x)=e^{in\theta}\phi(x), \forall(x, e^{i\theta})\in A\times S^1\}$$
$$\gamma(\emptyset)=0.$$

若不存在这样的映射，则定义 $\gamma(A)=+\infty$.

定理 4.1 设$\{\Sigma, \mathscr{H}, \gamma\}$定义如上，则它是一个 S^1 不变的规范指标.

证明 逐条验证指标性质(a)～(e)

(a) 是定义，(b) 显然.

为证次可加性和连续性，我们要

引理 4.1 设 $A\in\Sigma$, $\phi: A\to\mathbb{C}^k\backslash\{\theta\}$连续，且有

$$\phi(T_\theta x)=e^{in\theta}\phi(x), \text{对某 } n\in\mathbb{Z}_+, \forall x\in A;$$

则必存在 $\tilde{\phi}$: $\mathscr{X}\to\mathbb{C}^k$ 满足

$$\tilde{\phi}|_A=\phi,$$

$$\tilde{\phi}(T_\theta x)=e^{in\theta}\phi(x),\quad \forall(x,\ e^{i\theta})\in\mathscr{X}\times S^1.$$

证明　由 Tietze 定理，$\exists\hat{\phi}$: $\mathscr{X}\to\mathbb{C}^k$ 满足 $\hat{\phi}|_A=\phi$. 令

$$\tilde{\phi}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}\hat{\phi}(T_\theta x)\mathrm{d}\theta,$$

便有

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(T_\theta x)&=\frac{e^{in\theta}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in(s+\theta)}\hat{\phi}(T_{s+\theta}x)\mathrm{d}s\\&=e^{in\theta}\tilde{\phi}(x),\end{aligned}$$

而当 $x\in A$ 时，

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}\phi(T_\theta x)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(x)\mathrm{d}\theta=\phi(x).\end{aligned}$$

验证次可加性　设 $A_j\in\Sigma$, $\gamma(A_j)=k_j$, $j=1,2$. 由定义，有

$$\phi_j\text{: }A_j\to\mathbb{C}^{k_j}\backslash\{\theta\}\text{连续，而且}$$

$$\phi_j(T_\theta x)=e^{in_j\theta}\phi_j(x),\quad j=1,2.$$

定义
$$\Psi(x)=(\tilde{\phi}_1(x)^{n_2},\ \tilde{\phi}_2(x)^{n_1}),$$

这里幂次映射: $z\mapsto z^n$ 是 $\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}^k$ 的连续映射 $(z_1,\cdots,z_k)\mapsto(z_1^n,\cdots,z_k^n)$. 于是 Ψ: $A_1\cup A_2\to\mathbb{C}^{k_1+k_2}$ 是连续的，并且 $\Psi(x)\neq\theta$ 当 $x\in A_1\cup A_2$. 这就推出 Ψ: $A_1\cup A_2\to\mathbb{C}^{k_1+k_2}\backslash\{\theta\}$. 再注意到

$$\begin{aligned}\Psi(T_\theta x)&=(\tilde{\phi}_1(T_\theta x)^{n_2},\ \tilde{\phi}_1(T_\theta x)^{n_1})\\&=e^{in_1n_2\theta}(\tilde{\phi}_1(x)^{n_2},\ \tilde{\phi}_1(x)^{n_1})\\&=e^{in_1n_2\theta}\Psi(x),\end{aligned}$$

所以有
$$\gamma(A_1\cup A_2)\leqslant\gamma(A_1)+\gamma(A_2).$$

验证超变性　若有 $A\in\Sigma$, $h\in\mathscr{H}$ 使得 $\gamma(\overline{h(A)})=k$. 则必有 $n\in\mathbb{Z}_+$ 及 ϕ: $\overline{h(A)}\to\mathbb{C}^k\backslash\{\theta\}$ 连续，且满足 $\phi(T_\theta h(x))=e^{in\theta}\phi(h(x))$. 今令 $\psi=\phi\circ h$, 则 ψ: $A\to\mathbb{C}^k\backslash\{\theta\}$ 连续，且有

$$\begin{aligned}\psi(T_\theta x) &= \phi(h(T_\theta x))\\ &= \phi(T_\theta h(x)) \quad (h\ \text{等变})\\ &= e^{in\theta}\phi(h(x))\\ &= e^{in\theta}\psi(x),\end{aligned}$$

所以 $\gamma(A)\leqslant k$.

验证连续性 设 $\gamma(A)=k$,其中 A 是紧集. 由定义及引理 4.1, $\exists n\in\mathbb{Z}_+$ 及 $\tilde{\phi}: \mathscr{X}\xrightarrow{C}\mathbb{C}^k$ 满足: $\tilde{\phi}(T_\theta x)=e^{in\theta}\tilde{\phi}(x)$; 而 $\tilde{\phi}|_A=\phi$, 其中 $\phi: A\to\mathbb{C}^k\setminus\{\theta\}$.

取 $V=\tilde{\phi}^{-1}(\mathbb{C}^k\setminus\{\theta\})$, 则 V 是一个包含 A 的开集. 取 $\delta>0$ 使得 $N_\delta(A)\subset V$(因为 A 紧),所以

$$\tilde{\phi}: N_\delta(A)\to\mathbb{C}^k\setminus\{\theta\}.$$

这便推出

$$\gamma(N_\delta(A))\leqslant k.$$

验证规范性 设 $z\notin \mathrm{Fix}_{S^1}$, 即 $\exists\theta\in[0, 2\pi)$ 使得 $T_\theta z\neq z$. 记 $[z]=\{T_\theta z\mid e^{i\theta}\in S^1\}$, 要证: $\gamma([z])=1$.

首先$[z]$是非空的,所以 $\gamma([z])\geqslant 1$. 其次设 θ_0 是 $T_\theta z$ 的最小周期. 即

$$\begin{cases}T_{\theta_0}z=z,\\ T_s z\neq z \quad \text{当 } s\in(0, \theta_0),\end{cases}$$

则 θ_0 必整除 2π. 记 $n=\dfrac{2\pi}{\theta_0}$. 定义映射

$$\phi: [z]=\{T_\theta z\mid 0\leqslant\theta<\theta_0\}\to\mathbb{C}^1\setminus\{\theta\}$$

如下:

$$\phi: T_\theta z\mapsto e^{in\theta}.$$

显然 ϕ 是连续的并满足

$$\begin{aligned}\phi(T_s(T_\theta z)) &= \phi(T_{s+\theta}z)\\ &= \phi\left(T_{s+\theta-\left[\frac{s+\theta}{\theta_0}\right]\theta_0}z\right)\\ &= e^{in\left(s+\theta-\left[\frac{s+\theta}{\theta_0}\right]\theta_0\right)} = e^{in(s+\theta)}\\ &= e^{ins}\phi(T_\theta z), \quad \forall s\in[0, 2\pi).\end{aligned}$$

从而得到

$$\gamma([z])=1.$$

现在对于更加限制的等距表示 T, 我们来验证$\{\Sigma, \mathscr{H}, \gamma\}$还

是满足 d-维数性质的，其中 $d=2$.

假设 T: $S^1\to\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})$是这样的等距表示. 对于 $\mathscr{X}$ 的任意一个有穷维的 $T(S^1)$不变子空间 V，在它上面都有一个复化的欧氏结构. 使得 $T(S^1)$成为一个酉表示. (4.1)

如果 $\mathscr{X}$ 本身是 Hilbert 空间，而 $T(S^1)$是它的酉表示，那么这种酉表示显然满足上述条件.

定理 4.2 设$\{\Sigma,\mathscr{H},\gamma\}$如上，其中 $\mathscr{H}$ 由满足条件(4.1)的 $T(S^1)$表示组成. 设 V^{2k} 是 $T(S^1)$的一个 $2k$ 维不变子空间，使得在 V^{2k} 上有一个欧氏结构，使它与 $\mathbb{C}^k$ 同构. 而 $T(S^1)$在 $\mathbb{C}^k$ 上表示为酉算子. 又设

$$V^{2k}\cap\mathrm{Fix}_{S^1}=\{\theta\}; \tag{4.2}$$

则

$$\gamma(V^{2k}\cap S_1)=k. \tag{4.3}$$

在证明这定理之前，我们利用 Stone 单参数群的表示定理，把$\{T_\varphi\}$同时对角化，写成

$$T_\varphi=\mathrm{diag}\{e^{i\lambda_1\varphi},\cdots,e^{i\lambda_k\varphi}\}.$$

由于 T_φ 关于 φ 是 2π 周期的，所以 $\lambda_j\in\mathbb{Z}$, $j=1,\cdots,k$. 又因为有条件(4.2)，所以在 $\mathbb{C}^k\backslash\{\theta\}$内没有变换族$\{T_\varphi\}$的不动点，从而 $\lambda_j\neq 0$, $j=1,\cdots,k$.

证明 1° 先证：$\gamma(\mathbb{C}^k\cap S_1)\leqslant k$，为此构造连续映射 ϕ: $z=(z_1,\cdots,z_k)\mapsto(\zeta_1,\cdots,\zeta_k)$，其中 $\zeta_j=z_j^{\frac{\Delta}{\lambda_j}}$ 当 $\lambda_j>0$，$\zeta_j=\bar{z}_j^{\frac{\Delta}{|\lambda_j|}}$ 当 $\lambda_j<0$, $j=1,\cdots,k$; $\Delta=|\lambda_1\cdots\lambda_k|$，则 ϕ: $\mathbb{C}^k\cap S_1\xrightarrow{\text{连续}}\mathbb{C}^k\backslash\{\theta\}$，并且满足

$$\phi(T_\varphi z)=e^{i\Delta\varphi}\phi(z),\quad\forall z\in\mathbb{C}^k\cap S_1.$$

2° 为证反过来的不等式，我们需要下列：

定理 4.3 设 Ω 是 $\mathbb{C}^k$ 中 θ 的一个 $T(S^1)$不变的开邻域；又设 ϕ: $\partial\Omega\xrightarrow{C}\mathbb{C}^k\backslash\{\theta\}$满足

$$\phi(T_\varphi z)=e^{in\varphi}\phi(z),\quad\forall z\in\partial\Omega,\ \forall\varphi\in[0,2\pi],$$

则

$$\deg(\phi, \Omega, \theta)=\frac{n^k}{\prod\limits_{j=1}^{k}\lambda_j}. \tag{4.4}$$

暂时先承认这个定理，把它的证明留到后面去做.

现在来证明：$\gamma(\mathbb{C}^k\cap S_1)\geqslant k$.

用反证法. 若不然，有：$\gamma(\mathbb{C}^k\cap S_1)=k_1<k$. 便有 ϕ_1: $\mathbb{C}^k\cap S_1 \xrightarrow{\text{连续}} \mathbb{C}^{k_1}\backslash\{\theta\}$，及 $n\in\mathbb{Z}_+$ 满足

$$\phi_1(T_\varphi z)=e^{in\varphi}\phi_1(z).$$

按引理 6.1，有 ϕ_1 在 $\mathbb{C}^k$ 上的扩张 $\hat{\phi}$: $\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}^{k_1}$. 对 $\hat{\phi}$ 应用定理 4.3，有 $\deg(\hat{\phi}, B_1, \theta)\neq0$. 由于度的连续性，$\forall y\in\mathbb{C}^k$，$\|y\|$ 小时，应有 $\deg(\hat{\phi}, B_1, y)\neq0$. 今取 $y\in\mathbb{C}^k\backslash\mathbb{C}^{k_1}$，则 $\hat{\phi}^{-1}(y)\cap B_1\neq\emptyset$. 这显然与 $\hat{\phi}$: $\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}^{k_1}$ 矛盾.

在证明定理 4.3 时，回忆一下第一章 § 4，所谓 ϕ: $\Omega\to\mathbb{C}^k$ 的度是通过自然同构把 Ω 等同于 $\mathbb{R}^{2k}$ 中的一个开集 N，$\mathbb{C}^k$ 等同于 $\mathbb{R}^{2k}$，ϕ 等同于一个连续映射 $\mathbf{f}$; $\deg(\phi, \Omega, \theta)\triangleq\deg(\mathbf{f}, N, \theta)$.

定理 4.3 的证明 1° 只须对 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=1$ 证明这个定理就够了. 事实上，设定理 4.3 对 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=1$的情形已成立，我们来推一般的情形.

a) $\lambda_1, \cdots, \lambda_k\in\mathbb{Z}_+$. 作变换 g: $z=(z_1, \cdots, z_k)\mapsto(z_1^{\lambda_1}, \cdots, z_k^{\lambda_k})$ 记 $\tilde{\Omega}$ 为 $\mathbb{C}^k$ 中的 θ 邻域，使得 $g(\tilde{\Omega})=\Omega$. 则有

$$\tilde{\Omega}\xrightarrow{g}\Omega\xrightarrow{\phi}\mathbb{C}^k$$

满足：
$$T_\varphi\circ g(z)=(e^{i\lambda_1\varphi}z_1^{\lambda_1}, \cdots, e^{i\lambda_k\varphi}z_k^{\lambda_k})=g\circ\tilde{T}_\varphi z,$$
其中 $\tilde{T}_\varphi=\mathrm{diag}\{e^{i\varphi}, \cdots, e^{i\varphi}\}$. 于是有

$$\phi\circ g(\tilde{T}_\varphi z)=\phi(T_\varphi\circ g(z))=e^{in\varphi}(\phi\circ g)(z)$$

以及乘积公式

$$\deg(\phi\circ g, \tilde{\Omega}, \theta)=\deg(\phi, \Omega, \theta)\deg(g, \tilde{\Omega}, \theta).$$

因为 $\tilde{\Omega}$ 显然是一个关于 $\tilde{T}_\varphi$ 不变的，θ 的开邻域. 现在应用这段的假设于 $\phi\circ g$ 便有

$$\deg(\phi\circ g, \tilde{\Omega}, \theta)=n^k.$$

又由第一章命题 4.3,

$$\deg(g,\ \tilde{\Omega},\ \theta)=\prod_{j=1}^{k}\lambda_j,$$

即得
$$\deg(\phi,\ \Omega,\ \theta)=\frac{n^k}{\prod\limits_{j=1}^{k}\lambda_j}.$$

b) 若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 不全为正. 则对那些负的 λ_j, 引入变换 g_1: $(z_1, \cdots, z_j, \cdots, z_k)\to(z_1, \cdots, \bar{z}_j, \cdots, z_k)$. 为此则 $\phi\circ g_1$ 适合 a)的条件. 记 $\Omega_1=g_1^{-1}(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}\deg(\phi\circ g,\ \Omega_1,\ \theta)&=\deg(\phi,\ \Omega,\ \theta)\deg(g_1,\ \Omega_1,\ \theta)\\&=(-1)^l\deg(\phi,\ \Omega,\ \theta).\end{aligned}$$

其中 l 是$\{\lambda_j, \cdots, \lambda_k\}$中负数的个数. 由 a),

$$\deg(\phi\circ g,\ \Omega_1,\ \theta)=\frac{n^k}{\prod\limits_{j=1}^{k}|\lambda_j|},$$

从而
$$\deg(\phi,\ \Omega,\ \theta)=\frac{n^k}{\prod\limits_{j=1}^{k}\lambda_j}.$$

2° 可以用 C^∞ 函数代替 ϕ.

事实上, 记 $\tilde{\phi}$ 为引理 4.1 中 ϕ 在 $\mathbb{C}^k$ 上的扩张. 取 $j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, 并满足 $\int_{\mathbb{R}^1} j(t)\mathrm{d}t=1$, $j(-t)=j(t)$. 令 $j_\delta(y)=\frac{1}{\delta^{2k}}j\left(\frac{|y|}{\delta}\right)$以及

$$\phi_\delta=\tilde{\phi}*j_\delta,$$

即

$$\begin{aligned}\phi_\delta(z)&=\int_{\mathbb{R}^{2k}}\tilde{\phi}(x-\delta y)j(|y|)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}^{2k}}\tilde{\phi}(y)j\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\delta^{2k}},\end{aligned}$$

这里 $x, y\in\mathbb{R}^{2k}$, x 与 $z\in\mathbb{C}^k$ 相对应. 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 使得

$$\|\phi_\delta-\tilde{\phi}\|_{C(\bar{\Omega})}<\varepsilon.$$

取 $\varepsilon>0$ 适当小. 便有

$$\deg(\phi_\delta,\ \Omega,\ \theta)=\deg(\phi,\ \Omega,\ \theta),$$

以及

$$\begin{aligned}\phi_\delta(T_\varphi z)&=\int_{\mathbb{R}^{2k}}\tilde{\phi}(y)j\Big(\frac{|T_\varphi x-y|}{\delta}\Big)\frac{dy}{\delta^{2k}}\\&=\int_{\mathbb{R}^{2k}}\tilde{\phi}(T_\varphi y)j\Big(\frac{|x-y|}{\delta}\Big)\det(T_\varphi)\frac{dy}{\delta^{2k}}\\&=e^{in\varphi}\int_{\mathbb{R}^{2k}}\tilde{\phi}(y)j\Big(\frac{|x-y|}{\delta}\Big)\frac{dy}{\delta^{2k}}\\&=e^{in\varphi}\phi_\delta(z).\end{aligned}$$

3° 取 $\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^1_+)$ 满足

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & 当\ t<\varepsilon,\\0, & 当\ t\geqslant 2\varepsilon.\end{cases}$$

令 $\qquad\hat{\phi}(z)=\eta(|z|)(z_1^n,\cdots,z_k^n)+(1-\eta(|z|))\phi_\delta(z),$

则可以用 $\hat{\phi}$ 代替定理中的 ϕ. 事实上,显然有

$$\hat{\phi}(T_\varphi z)=e^{in\varphi}\hat{\phi}(z),$$

并且 $\hat{\phi}|_{\partial\Omega}=\phi_\delta|_{\partial\Omega}$, 当 $2\varepsilon<\mathrm{dist}(\theta,\partial\Omega)$.

总结 1°~3°, 以下我们可以假设

$\phi\in C^\infty(\mathbb{C}^k,\mathbb{C}^k)$, 且 $\phi:\partial\Omega\to\mathbb{C}^k\backslash\{\theta\}$, 满足:

$$\phi(\tilde{T}_\varphi z)=e^{in\varphi}\phi(z),\quad \tilde{T}_\varphi=\mathrm{diag}\{e^{i\varphi},\cdots,e^{i\varphi}\},$$

并且 ϕ 在 B_ε(中心在 θ, ε 为半径的球)内具有形式 $(z_1^n,\cdots,z_k^n)$.

4° 引入一个 $k\times k$ 阵 A. 作

$$\Phi(A,z)=\phi(z)+Az^n,$$

其中 $z^n=(z_1^n,\cdots,z_k^n)$. 和 Borsuk 定理的证明一样,要证: 作为 $\mathbb{C}^{k^2}\times(\Omega\backslash\bar{B}_\varepsilon)\to\mathbb{C}^k$ 的映射,θ 是 Φ 的一个正则值. 事实上,

$$d\Phi(A,z)(\delta A,\delta z,\delta\bar{z})=\Phi_z\delta z+\Phi_{\bar{z}}\delta\bar{z}+\Phi_A\delta A. \tag{4.5}$$

$\forall\zeta\in\mathbb{C}^k$, 取 $\delta z=\delta\bar{z}=0$, 注意到

$$(\Phi_A\delta A)_j=\sum_{l=1}^k z_l^n\delta A_{jl}.$$

从 $z\notin\bar{B}_\varepsilon$, 推得 $(z_1,\cdots,z_k)$ 中至少有一个不为 0, 从而方程组

$$\sum_{l=1}^k z_l^n\delta A_{jl}=\zeta_j \tag{4.6}$$

总有解 δA_{jl}. 从而下列方程有解:

$$d\Phi(A,z)(\delta A,\delta z,\delta\bar{z})=\zeta,$$

即 $d\Phi(A, z)$是在上的，或 θ 是 Φ 的正则值.

现在应用横截定理（第一章§3），对 a. e. $A\in\mathbb{C}^{k^n}$, $\phi_A(z)\triangleq\Phi(A, z)$以 θ 为正则值.

5° 当 $\|A\|$ 小时，

$$\|\phi_A-\phi\|_{C(\partial\Omega)} \text{ 也小，}$$

从而有

$$\deg(\phi, \Omega, \theta)=\deg(\phi_A, \Omega, \theta). \tag{4.7}$$

对于使 θ 成为 $\phi_A(z)$的正则值的 A, $\|A\|$ 小，我们知道：$Z\triangleq(\Omega\backslash B_\varepsilon)\cap\phi_A^{-1}(\theta)$只由孤立点组成. 但若 $z^*\in Z$, 则 $T_\varphi z^*\in Z$, $\forall\varphi\in S^1$; 于是 Z 又不可能只由孤立点组成，除非 $Z=\emptyset$, 由此得

$$\deg(\phi_A, \Omega, \theta)=\deg(\phi_A, B_\varepsilon, \theta). \tag{4.8}$$

但在 B_ε 上， $\phi_A(z)=z^n+Az^n$, $z^n=(z_1^n, \cdots, z_k^n)$,

只需 $\|A\|<1$, 就有

$$\begin{aligned}\deg(\phi_A, B_\varepsilon,\theta)&=\deg(\phi_{tA}, B_\varepsilon, \theta), \ 0\leqslant t\leqslant 1\\&=\deg(\phi, B_\varepsilon, \theta)\\&=n^k \quad \text{（第一章命题 4.3），}\end{aligned} \tag{4.9}$$

联合等式(4.7)(4.8)与(4.9)立得

$$\deg(\phi, \Omega, \theta)=n^k.$$

再联合 1°～3° 便得到定理的结论.

4.2 Ekeland-Lasry 定理

下面我们来介绍 Ekeland-Lasry 的一个定理. 这是关于一个 Hamilton 组在给定能量面 Σ 上有 n 个不同周期轨道的结果. 这里 n 是这 Hamilton 函数的自变量的个数.

在表述这个定理之前，让我们解释清楚什么叫不同的周期轨道.

设 $H\in C^1(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1)$是一个 Hamilton 函数.

$$\dot{z}=JH'(z) \tag{4.10}$$

是对应的 Hamilton 方程组.

定义 4.1 设 z_1, z_2 是(4.10)的两个周期解. 称 z_1, z_2 在几何

上是相同的，是指存在微分同胚 $\varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$，使得

$$z_2 = z_1 \circ \varphi.$$

称 z_1 与 z_2 属于同一轨道集，是指它们具有相同的周期，并且 $\exists s \in \mathbb{R}^1$，使得

$$z_2(t) = z_1(t+s).$$

引理 4.2 Hamilton 方程组的任意两个周期解 z_1, z_2 在几何上是相同的 $\Leftrightarrow$ 属于同一轨道集。

证明 "$\Leftarrow$"，显然。

"$\Rightarrow$"。设
$$z_2 = z_1 \circ \varphi,$$
其中 φ 是一个微分同胚。则有
$$\dot{z}_2 = JH'(z_2) = JH'(z_1 \circ \varphi)$$
以及
$$\dot{z}_2 = \dot{\varphi} \cdot \dot{z}_1 \circ \varphi = \dot{\varphi} \cdot JH'(z_1 \circ \varphi).$$
所以有
$$\dot{\varphi} \equiv 1,$$
即得一常数 $s \in \mathbb{R}^1$，使得
$$\varphi(t) = \varphi(t+s).$$

设给定了 H 的一个能量面 $\Sigma = H^{-1}(1)$。我们问在 Σ 上 (4.10) 有几个不同的周期轨道（几何上不同的）？为此，转化问题的提法，把给定能量的问题化归为给定周期的问题。即，设 $\Sigma = \partial\Omega$，其中 Ω 是 θ 的一个有界开凸邻域。并设 $a(z)$ 是 Ω 的 Minkowski 泛函。令

$$\overline{H}(z) = a(z)^p, \ 1 < p < \infty,$$

然后求

$$\dot{z} = J\overline{H}'(z) \tag{4.10$'$}$$

的非平凡 2π 周期解。再通过变换

$$w(t) = k^{\frac{1}{2-p}} z(k^{-1}t), \quad k > 0, \tag{4.11}$$

其中

$$k = (\overline{H}(z))^{\frac{p-2}{p}} \tag{4.12}$$

得到 (4.10) 的在 Σ 上的解：

$$\dot{w} = k^{\frac{p-1}{2-p}} J\overline{H}'(z(k^{-1}t)) = J\overline{H}'\left(k^{\frac{1}{2-p}} z(k^{-1}(t))\right) = J\overline{H}'(w),$$

$$\overline{H}(w)=k^{\frac{p}{2-p}}\overline{H}(z)=1.$$

w 的周期现在是 $T=2\pi k$. 然而，$z\mapsto w$ 的对应不是 1-1 的.

例如设　　$\overline{H}(z)=\overline{H}(x,\ p)=\frac{1}{4}(x^2+p^2)^2$.

它对应的方程(4.10)′有 2π 周期解：

$$z_1=(\cos t,\ \sin t),$$
$$z_2=\sqrt{2}\,(\cos 2t,\ \sin 2t),$$

它们在几何上显然是不同的，但所对应的 w 却都是

$$w=\sqrt{2}\,(\cos 2t,\ \sin 2t).$$

现在我们关心的是在 Σ 上有多少个不同的周期轨道 w. 所以单从找到多少个不同的 z，并不能立刻回答我们的问题.

为了消除这种对应 $z\mapsto w$ 的不唯一性，我们限制考察(4.10)′的以 2π 为最小周期的周期解. 在这时，有

引理 4.3　设 z_1, z_2 是(4.10)′的两个不在同一轨道集上的，以 2π 为最小周期的周期解，又设 w_1, w_2 是 z_1, z_2 分别通过变换(4.11), (4.12)得到的在 Σ 上的周期解；则 w_1 与 w_2 在几何上是不同的.

证明　先看 $k_i=\overline{H}(z_i)$, $i=1,\ 2$.

若 $k_1=k_2=k$，则 $w_i(t)=k^{\frac{1}{2-p}}z_i(k^{-1}t)$, $i=1,\ 2$. 由于 z_1 与 z_2 不在同一轨道集上，所以 w_1 与 w_2 也不能在同一轨道集上.

若 $k_1\neq k_2$，则 w_1 以 $2\pi k_1$ 为最小周期；而 w_2 以 $2\pi k_2$ 为最小周期. 它们当然不能在同一轨道集上. 证毕.

于是我们的问题化归为寻求方程(4.10)′的以 2π 为最小周期的不同周期轨道的个数. 这又等价于寻求 $\{v,\ \chi\}\in E\times\mathbb{R}^{2n}$ 满足方程

$$Kv-G'(v)=\chi \tag{4.13}$$

(其中 v 是以 2π 为最小周期的函数)的解 $\{v,\ \chi\}$ 的个数. 这里

$$E=\left\{v\in L^{p'}(S^1,\ \mathbb{R}^{2n})\,\Big|\,\int_0^{2\pi}v\,\mathrm{d}t=0\right\},$$

$$\|v\|_{L^{p'}}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|v(t)|_{\mathbb{R}^{2n}}^{p'}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$K=\left(-J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}=J\left\{\int_0^t-\frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\int_0^t\right\},$$

而

$$G=\overline{H}^*\text{ 是 }\overline{H}\text{ 的共轭函数.}$$

事实上,若$\{v,\ \chi\}$是(4.13)的解,则

$$u=G'(v)$$

便满足
$$\dot{u}=J\overline{H}'(u);$$
并且由于
$$u=G'(v)\Leftrightarrow v=\overline{H}'(u),$$
可见u还是以2π为最小周期的.

现在我们来求解(4.13),并估计以2π为最小周期的解v的个数.

为此取$p\in(1,\ 2)$, 从而$p'>2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 考察泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}\langle Kv,\ v\rangle,\qquad \forall v\in E,$$
$$g(v)=\int_0^{2\pi}G(v)-1,$$

其中$\langle,\rangle$表示L^p与$L^{p'}$函数间的积分除以2π,假设

$$H\in C^{2-0}(\mathbb{R}^{2n},\ \mathbb{R}^1),$$

可得
$$a(z)\in C^{2-0}(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{\theta\},\ \mathbb{R}^1).$$
从而 $\overline{H}\in C^{2-0}(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{\theta\},\ \mathbb{R}^1)$, $G\in C^{2-0}(\mathbb{R}^{2n},\ \mathbb{R}^1)$. 令$M=g^{-1}(0)$; 则$M$是$E$的一个$T(S^1)$不变的$C^{2-0}$子流形.

事实上, $g\in C^{2-0}(L^{p'}(S^1,\ \mathbb{R}^{2n}),\ \mathbb{R}^1)$, 从而$g\in C^{2-0}(E,\ \mathbb{R}^1)$, 并且

$$\langle \mathrm{d}g(v),\ w\rangle=\int G'(v)w,\quad \forall w\in E.$$

所以有
$$\langle \mathrm{d}g(v),\ v\rangle=\int G'(v)\cdot v=p'\int G(v),$$

当$v\in M$时, $\langle \mathrm{d}g(v),\ v\rangle=p'\neq 0$, 从而$\mathrm{d}g(v)\neq\theta$.

我们来求泛函J限制在M上的以2π为最小周期的临界点

v. 有

引理 4.4 设 v_0 是 (J, M) 的临界点，则必存在 $(\lambda, \chi_0)\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^{2n}$ 使得

$$Kv_0=\lambda G'(v_0)+\chi_0. \tag{4.14}$$

证明 由 Lagrange 乘子定理，有 $\lambda\in\mathbb{R}^1$ 使得

$$dJ(v_0)=\lambda dg(v_0),$$

从而有 $\chi_0\in\mathbb{R}^{2n}$，使得

$$Kv_0=\lambda G'(v_0)+\chi_0.$$

比较(4.13)与(4.14)，我们来消除 λ. 只要，例如说，$J(v_0)>0$，由(4.14)，便有

$$\lambda=\frac{\langle Kv_0,\ v_0\rangle}{\int G'(v_0)v_0}=\frac{2}{p'}J(v_0). \tag{4.15}$$

当令

$$v(t)=\lambda^{\frac{1}{p'-2}}v_0(t), \tag{4.16}$$

$$\chi=\lambda^{\frac{1}{p'-2}}\chi_0 \tag{4.17}$$

时，$\{v,\ \chi\}$ 便是(4.13)的一个解；并且，如果 v_0 以 2π 为最小周期，那么 v 也以 2π 为最小周期.

事实上，

$$Kv=\lambda^{\frac{1}{p'-2}}Kv_0=\lambda^{\frac{p'-1}{p'-2}}G'(v_0)+\lambda^{\frac{1}{p'-2}}\chi_0=G'(v)+\chi.$$

于是问题化归为：

求 $(J,\ M)$ 的，以 2π 为最小周期的，并满足 $J(v_0)>0$ 的临界点 v_0.

引理 4.5 $(J,\ M)$ 达到正的极大值 m^*.

证明 $(J,\ M)$ 是有界的：

$$|\langle Kv,\ v\rangle|\leqslant\|v\|_{L^{p'}}^2.$$

又因为 Ω 是 θ 的有界开邻域. 所以有 $r<R$ 使得

$$B_r\subset\Omega\subset B_R, \tag{4.18}$$

即
$$R^{-p}|z|^p\leqslant\overline{H}(z)\leqslant r^{-p}|z|^p.$$

所以有常数 $a>0$ 使得

$$ar^{p'}|z'|^{p'}\leqslant G(z')\leqslant aR^{p'}|z'|^{p'}, \tag{4.19}$$

从而在 M 上，有

$$\frac{1}{(2\pi a)R^{p'}}\leqslant \|v\|_{L^{p'}}^{p'}\leqslant \frac{1}{(2\pi a)r^{p'}}, \tag{4.20}$$

从而 $J(v)$是有界的.

2° J 满足(P.S.)$^+$ 条件. 设$\{v_m\}\subset M$，即

$$\int G(v_m)=1, \tag{4.21}$$

又满足：

$$0<\alpha\leqslant\langle Kv_m,\ v_m\rangle\leqslant\beta, \tag{4.22}$$

$$w_m=Kv_m-\lambda_m G'(v_m)-\chi_m\to\theta(L^p), \tag{4.23}$$

其中$\{\lambda_m,\ \chi_m\}\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^{2n}$；要证有收敛子列$\{v_{m_i}\}$.

事实上，由(4.21)推出 $\|v_m\|_{L^{p'}}$ 有界，从而有子列 $\{v_{m_i}\}$ 使得 Kv_{m_i} 收敛，例如到 z^*. 按(4.23)，

$$\langle Kv_{m_i},\ v_{m_i}\rangle-\lambda_{m_i}p'=\langle w_{m_i},\ v_{m_i}\rangle\to 0$$

推出 $\lambda_{m_i}\to\lambda^*$，再由 $G'(v_m)$在 L^p 有界，推出 χ_m 在 L^p 有界，从而在 $\mathbb{R}^{2n}$ 有界，于是有 $\chi_{m_i}\to\chi^*$.

这个$\lambda^*\neq 0$. 因若不然，便有 $z^*=\chi^*$；而 $z^*\in R(K)$(K 的值域)，$\chi^*\in E^{\perp}$. 从而 $z^*=\chi^*=\theta$. 这便与 $\alpha>0$ 矛盾(条件(4.22)).

于是 $u_{m_i}=G'(v_{m_i})\to u^*(L^p)$，推出

$$v_{m_i}=\overline{H}'(u_{m_i})\to\overline{H}'(u^*)\quad(L^{p'});$$

即得$\{v_m\}$在 E 有收敛子列.

3° $J^{-1}(\mathbb{R}^1_+)\cap M\neq\emptyset$. 事实上，$K$ 有正本征值，例如说$+1$，对应有本征元 e，取 $\|e\|_{L^{p'}}=1$，以及

$$\mu=\left(\int G(e)\right)^{-\frac{1}{p'}}>0;$$

便有

$$\int G(\mu e)=\mu^{p'}\int G(e)=1,$$

即 $\mu e\in M$. 但

$$\langle K(\mu e),\ \mu e\rangle=\mu^2\int|e|^2>0. \qquad 证毕.$$

现在我们来考察变换：

$$T_k:\ v(t)\mapsto v(kt),\quad k=1,2,\cdots.$$

由于

$$\int_0^{2\pi} G(T_k v)=\int_0^{2\pi} G(v(kt))\mathrm{d}t=\frac{1}{k}\int_0^{2k\pi} G(v(s))\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^{2\pi} G(v),$$

所以 $T_k: M\to M$. 但

$$J(T_k v)=\frac{1}{k}J(v);$$

这表明,在
$$\widetilde{M}=\left\{v\in M\,\middle|\,J(v)>\frac{m^*}{2}\right\}$$
上,J 的一切临界点只能以 2π 为最小周期.

因为倘若 $v\in\widetilde{M}$,并有周期 $2k_0\pi$, $k_0\geqslant 2$, 令

$$v_0(t)=v(k_0^{-1}t),$$

则 $v_0\in E$,并且

$$\int G(v_0)=\int G(T_{k_0}v_0)=\int G(v)=1,$$

即 $v_0\in M$. 但

$$J(v_0)=k_0J(T_{k_0}v_0)=k_0J(v)>\frac{k_0}{2}m^*\geqslant m^*.$$

这与 m^* 是极大值的假设不符.

引理 4.6　如果(4.18)中的 $R<\sqrt{2}\,r$,则在 $\widetilde{M}$ 上有集合 A,它的 S^1 指标 $\gamma(A)\geqslant n$.

证明　取 $\mathbb{C}^n$ 上的单位球 S^{2n-1},考察集合

$$A_1=\{v=ce^{it}\,|\,c\in S^{2n-1}\},$$

则有:$Kv=v$. 作映射

$$\psi:\ v\mapsto\lambda v\in M,$$

其中
$$\lambda=\left(\int G(v)\right)^{-\frac{1}{p'}},$$

显然 ψ 是一个连续同胚,并且有估计

$$\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{p'}}R}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{1}{p'}}r}$$

问题归结为是否有 $J(\lambda v)>\frac{m^*}{2}$?

因为

$$J(\psi(v))=\frac{\lambda^2}{2}\langle Kv,\ v\rangle=\frac{1}{2}\lambda^2\geqslant\frac{1}{2(2\pi a)^{\frac{2}{p'}}}\cdot\frac{1}{R^2}$$

$$>\frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi a)^{\frac{2}{p'}}}\cdot\frac{1}{r^2},\tag{4.24}$$

但另一方面，由(4.20)，

$$m^*=\sup_{v\in M}J(v)=\sup_{v\in M}\frac{1}{2}\langle Kv,\ v\rangle\leqslant\frac{1}{2}\sup_{v\in M}\|v\|_{L^{p'}}^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi a)^{2/p'}}\cdot\frac{1}{r^2}.\tag{4.25}$$

联合(4.24)与(4.25)，可得

$$J(\psi(v))>\frac{m^*}{2},\quad \forall v\in A_1.$$

今取 $A=\psi(A_1)$. 则由定理 4.2,

$$\gamma(A)\geqslant\gamma(A_1)=n.$$

这是因为 $A_1=V^{2n}\cap S_1$, 这个 E 的 $2n$ 维线性子空间 V^{2n} 可以复化$\left(\text{复化过程见第一章 §1.3 关于 } A=-J\frac{d}{dt} \text{ 的讨论}\right)$为 $\mathbb{C}^n$, 在这复化子空间上，平移群 T_s:

$$(T_sv)(t)=v(t+s)\quad s\in S^1$$

有酉表示: $\mathrm{diag}\{e^{-is},\cdots,e^{-is}\}$，并且

$$V^{2n}\cap\mathrm{Fix}_{S^1}=\{\theta\}.$$

定理 4.4(Ekeland-Lasry) 设 $H\in C^{2-0}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^1)$, 又设 $\Sigma=H^{-1}(1)$是一个严格凸集 Ω 的边界，即 $\Sigma=\partial\Omega$, 又设有 $R>r>0$, 使得

$$R<\sqrt{2}r,$$

$$B_r\subset\Omega\subset B_R,$$

则方程组

$$\dot{z}=JH'(z)\tag{4.10}$$

在 Σ 上至少有 n 个不同的周期轨道.

证明 联合引理 4.2, 4.3, 与 4.4, 把在 Σ 上找不同周期轨道的个数问题，化归为求泛函 (J, M) 的以 2π 为最小周期的临界点问题. 令

$$c_k = \inf_{\gamma(A)\geq k} \sup_{x\in A} \mathbf{f}(x) \quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $\mathbf{f}=-J$, 而 A 是 M 上的闭子集. 注意到,

$$-m^* \leqslant c_k, \quad k=1,2,\cdots;$$

又由引理 4.6, 还有

$$c_n \leqslant -\frac{m^*}{2}.$$

于是由定理 2.2, $\mathbf{f}$ 至少有 n 个不同的临界轨道集. 这是因为现在平移群

$$(T_s v)(t) = v(t+s) \quad s \in S^1$$

是 E 上 S^1 的一个等距在上表示, 而 M 与 J 都是关于 $T(S^1)$ 不变的.

再按引理 4.5 与 4.6 之间的那一段的讨论. 可见所得到这 n 个不同的临界轨道集内的临界点, 都是以 2π 为最小周期的. 于是我们得到了方程组(4.10)在 Σ 上的 n 个几何上不同的周期轨道.

评注与参考文献

§1 紧流形上的 Люстерник-Шнирельман 理论是 Люстерник[Lj1]与 Люстерник-Шнирельман[LS1]引进的. 经 Palais 发展到 Banach 流形, 参看[Pa.2, i]. Dugundji 定理是 Tietze 定理的推广, 见 Dugundji[Du 1]. 关于 ANR 的性质, 参看 Hanner[Ha 1], Palais[Pa 3]. 定理 1.3 见[Du 1]. 定理 1.5 的证明参照 Palais[Pa 4]与 Clark[ClD 1](也请看 J. T. Schwartz[Sch. 1, 2]).

§2 一般指标的定义可参看 Fadell-Rabinowitz[FR 1]及 Benci[Be 3], 这里的陈述按 Benci, 但他只在 Hilbert 空间上给出定义, 而这里的定义和定理都推广到了 Banach 空间. 引理 2.5 是张恭庆[Ch 1]给出的. 伪指标概念起源于 Ambrosetti-Rabinowitz[AR1]. Benci[Be3]曾引入伪指标的名称, 但这里的伪指标定义与 Benci 的不同, 它包含[AR1]中的原型为特殊情形. 定理 2.3~2.5 是一些具体结果的抽象形式.

§3 $\mathbb{Z}_2$ 群的指标——亏格. 首见于 Coffman[Cof1](更早Conner Floyd[CF1]引入过一种余指标), Красносельский[Kra1]有一个等价定义. 等价性见

Rabinowitz[Ra 8]. 这里的 Borsuk-Ulam 定理的证明是 Nirenberg 给出的. 通常的证明可参看 Lloyd[LL 1]及 Greenberg[Gr 1]. 定理 3.3 及 3.4 见 Clark [ClD1], 定理 3.5 见 Rabinowitz[Ra 2], 定理 3.6 的原来形式是推论 3.2, 见 Ambrosetti, Rabinowitz[AR1]. 定理 3.8 是张恭庆、刘嘉荃得到的, 见[张、刘 1]定理 3.9 与 3.10, 见[Ra2].

关于 S^1 群的指标理论, 最早是由 Fadell 与 Rabinowitz [FR1]引进的, 用于研究 Hamilton 方程组的分歧问题. 但因这种指标在某种意义上相应于畴数, 并且用到较多的拓扑知识如纤维丛与陈示性类, 对于分析学者来说不是十分便利的.

V. Benci[Ben2]引进了一种 S^1 的几何指标. 它相应于 $\mathbb{Z}_2$ 群下的 genus 本节前半部是参照 V. Benci[Ben 2]改写的. 但因[Ben 2]中关于 $\gamma(S^{2n-1})=n$ 的定理证明仍脱不开纤维丛与陈示性类. 我们采用了 Nirenberg[Nir 3] 关于这个结论的分析证明. 在这里只有 Sard 定理和度理论是必要的准备知识.

关于 S^1 指标的 Borsuk-Ulam 定理的工作请看 Fadell, Husseini, Rabinowitz[FHR1].

Ekeland-Lasry 定理是一个非常漂亮的定理, 参看[EL 1]. 自该文出现后, 人们致力于简化的证明, 如 A. Ambrosetti, Mancini[AM1], 与 H. Hofer [Hof1]. 本节所用的是一个与他们都不相同的证明.

与定理 6.4 相类似, 有下列 Weinstein 定理:

设 $H\in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^1)$, 并设 $H''(\theta)$是正定的, 满足: $H(\theta)=H'(\theta)=0$, 则对足够小的 $\varepsilon>0$, 在 $H^{-1}(\varepsilon)$ 上至少含有 n 个(4.10)的几何上不同的周期轨道. 参看 Moser[Mo 2], A. Weinstein[We1, 2].

Berestycki-Lasry[BL 1] 推广了定理 4.4, 将其中 Ω 的凸性换成星形条件.

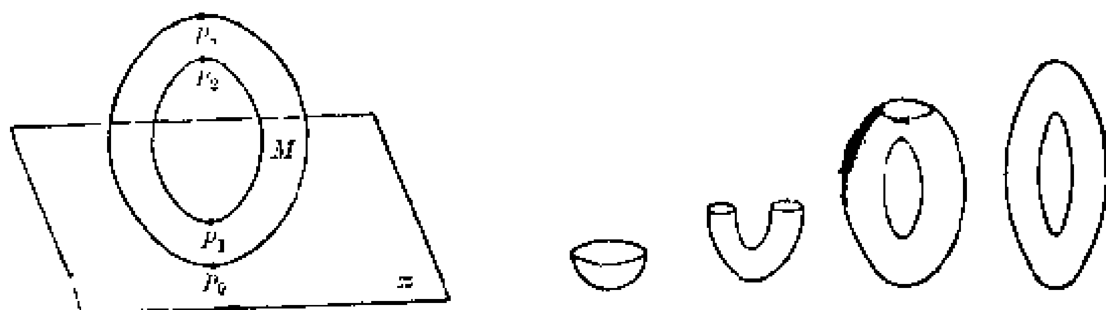
应用 S^1 群指标研究非线性波动方程周期解的工作还应提到下列工作, Amann-Zehnder[AZ3], 吴绍平[Wu 1], 刘嘉荃[L 1].

对称泛函的扰动理论有一些有趣的工作. 对超线性椭圆边值问题, 参看 Bahri-Berestycki[BB 1], Struwe[St 1], 董光昌、李树杰[DL 1]; Hamilton 方程组的周期解, 参看 Bahri-Berestycki[BB2, 3]; 超线性波方程与梁方程, 看刘嘉荃[L 1].

第五章　Morse 理论及其应用

我们曾指出：临界点理论的基本手法是通过考察函数的水平集 $\mathbf{f}_a$，随 a 变化时，其拓扑结构的变化，来判定临界点的存在性和估计临界点的个数．Morse 理论则更深刻地揭示出临界点的性态是怎样影响水平集变化的．

为了说明它的大意，我们来考察下列富有启发性的例子：M 是切于平面 π 的一个环面 $S^1\times S^1$，如下图所示．设 $\mathbf{f}$：$M\to\mathbb{R}^1$ 是关于平面 π 的高度．记 $h_i=\mathbf{f}(p_i)$，$i=1, 2, 3$．易见：



(1)　当 $a<0$ 时，$\mathbf{f}_a=\varnothing$．

(2)　当 $0<a<h_1$ 时，$\mathbf{f}_a$ 同胚于一个 2 维胞腔．

(3)　当 $h_1<a<h_2$ 时，$\mathbf{f}_a$ 同胚于柱面．

(4)　当 $h_2<a<h_3$ 时，$\mathbf{f}_a$ 同胚于一紧流形，其环柄数为 1，边缘为一圆周．

(5)　$a\geqslant h_3$ 时，$\mathbf{f}_a=M$．

就伦型而言，(1)→(2) 的变化是粘合上一个 0 维胞腔．(2)→

(3) 的变化是粘合上一个 1 维胞腔, (3)→(4) 的变化仍是粘合上一个 1 维胞腔, 而 (4)→(5) 的变化则是粘合上一个 2 维胞腔. 上述变化的原因正是由于实数 a 越过了函数 $\mathbf{f}$ 的临界值. 粘合上的胞腔的维数都是由对应的临界点的性态所决定的. 关于胞腔粘合的理论, 将在 § 2.4 中讨论, 把一个个胞腔粘合并在一起, 得到的整体性结论表现为下列 Morse 不等式:

$$M_0 \geqslant \beta_0,$$

$$M_1 - M_0 \geqslant \beta_1 - \beta_0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$M_n - M_{n-1} + \cdots + (-1)^n M_0 \geqslant \beta_n - \beta_{n-1} + \cdots + (-1)^n \beta_0,$$

其中 M_k 是紧流形 M 上任意光滑非退化函数 $\mathbf{f}$ 的 Morse 指标为 k 的临界点的个数, 而 β_k 则是流形 M 的 Betti 数. 注意到这组不等式左边与任意函数 $\mathbf{f}$ 的临界点的性态及个数有关, 而其右边只与这流形 M 本身有关, 我们自然想到利用它得到函数的临界点个数的估计, 回到上例, 注意到环面的 Betti 数是: $\beta_0 = \beta_2 = 1$, $\beta_1 = 2$; 推得非退化函数 $\mathbf{f}$ 至少有四个不同的临界点.

本章 § 2 是 Morse 理论的基本内容, 因为它涉及到一些代数拓扑的知识, 我们将在 § 1, 给出必要的准备知识.

§ 3 包含几个临界点存在性定理, 它们都是利用 Morse 理论的结论和方法导出的, 包括三解定理、分歧定理、渐近线性算子方程非平凡解的判定, 以及用卡积判定临界点个数的极小极大定理.

在 § 4 举几个例子, 说明 § 3 中的临界点定理是怎样应用到微分方程问题中去的, 最后一个例子是 Arnold 关于环面上保测变换的不动点个数的猜测的证明.

§ 1 同调论的回顾

在这一节, 我们罗列奇异同调论与奇异上同调论的一些重要概念和结论. 目的只在后面的需要, 证明请看 Greenberg [Gr1].

1.1 奇异同调群

代数拓扑的思想是对拓扑空间赋予代数量的描写，使得拓扑问题通过这些代数量转化为代数问题，奇异同调群就是这种代数量.

设 X 是一个拓扑空间，设 Δ_q 是 $\mathbb{R}^q$ 中的一个标准的 q-维单形，$q=0,1,2,\cdots$；即 Δ_q 是由 θ, e_1, $\cdots$, e_q, $e_i=(0,\cdots,\underset{i}{1},0,\cdots,0)$, $i=1$, $\cdots$, q, 所生成的. X 上的一个奇异(singular)q-单形就定义为 $\Delta_q\to X$ 的一个连续映射 φ. 用 Σ_q 表记 X 上的一切奇异 q-单形所构成的集合.

又设 G 是一个 Abel 群，形式和

$$c=\sum g_i\sigma_i,\ g_i\in G,\ \sigma_i\in\Sigma_q$$

称为是一个 q-链，这种 q-链的全体记作 $C_q(X, G)$. 如果 X, X' 是两个拓扑空间，若有连续的

$$f:\ X\to X',$$

那么在 $C_q(X, G)\to C_q(X', G)$ 上，它诱导出一个同态 f_*: $c=\sum g_i\sigma_i\to\sum g_i f(\sigma_i)$.

对于 $\sigma\in\Sigma_q$, 定义边缘算子 ∂ 如下，

$$\partial\sigma=\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\sigma^{(j)},$$

其中 $\sigma^{(j)}=\varphi[\theta,\ e_1,\ \cdots,\ \hat{e}_j,\ \cdots,\ e_q]$, $[\theta,\ e_1,\ \cdots,\ \hat{e}_j,\ \cdots,\ e_q]$ 表示 θ, e_1, $\cdots$, e_q 中除去 e_j, 其余向量构成的 $q-1$ 维单形，$j=0$, 1, $\cdots$, q. 然后把 ∂ 线性地扩张到 $C_q(X, G)$上去，即

$$\partial\sum g_i\sigma_i=\sum g_i\partial\sigma_i.$$

不难验证：

(1) ∂: $C_q(X, G)\to C_{q-1}(X, G)$, $q=1, 2, \cdots$ 是一个同态.

(2) $\partial^2 c=\partial\partial c=0$, $\forall c\in C_q(X, G)$.

事实上，只需验证 $\partial^2\sigma=0$, $\forall\sigma\in\Sigma_q$ 就够了，而

$$\partial\partial\sigma=\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\partial\sigma^{(j)}$$

$$=\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\sum_{k=0}^{q}(-1)^k(\sigma\circ F_q^j)\circ F_{q-1}^k,$$

其中 F_q^l 表示略去第 l 个，并依次往前递补的运算．$F_q^l\Delta_q=[\theta, e_1, \cdots, e_{l-1}, e_{l+1}, \cdots, e_q]$．从而

$$\partial\partial\sigma=\sum_{1=k<j}^{q}(-1)^{j+k}\sigma\circ F_q^kF_{q-1}^{j-1}+\sum_{0=j<k}^{q-1}(-1)^{j+k}\sigma\circ F_q^jF_{q-1}^{k-1}=0.$$

再定义：

$$Z_q(X, G)=\ker(\partial)=\{c\in C_q(X, G)\,|\,\partial c=0\}$$

称其为奇异 q–闭链群．

$$B_q(X, G)=\mathrm{Im}(\partial)$$
$$=\{c\in C_q(X, G)\,|\,\exists c'\in C_{q+1}(X, G)\text{使得}\ \partial c'=c\},$$

称为奇异 q–边缘群．

$$H_q(X, G)=Z_q(X, G)/B_q(X, G)$$

这个商群就称为奇异 q–同调群．

现在，再考察相对性的概念．

设 X, Y 是一对拓扑空间，并且 $Y\subset X$ 是它的一个子空间，我们就把这个对子 (X, Y) 称为一个拓扑空间对．

设 (X, Y)，(X', Y') 是两个拓扑空间对，$\mathbf{f}$: $(X, Y)\to(X', Y')$ 称为是连续的，如果 $\mathbf{f}$: $X\to X'$ 连续，并且 $\mathbf{f}(Y)\subset Y'$．两个映射 $\mathbf{f}$, g: $(X, Y)\to(X', Y')$ 称为是同伦的，是指：$\exists F$: $[0, 1]\times X\to X'$，连续，并且 $F(0, \cdot)=\mathbf{f}$, $F(1, \cdot)=g$，以及 F: $[0, 1]\times Y\to Y'$．

设 (X, Y) 是一个拓扑空间对，因为

$$\partial:\ C_q(X, G)\to C_{q-1}(X, G)$$

蕴含了
$$\partial:\ C_q(Y, G)\to C_{q-1}(Y, G),$$

于是它诱导出一个新的同构：

$$\partial':\ C_q(X, G)/C_q(Y, G)\to C_{q-1}(X, G)/C_{q-1}(Y, G).$$

称
$$C_q(X, Y; G)=C_q(X, G)/C_q(Y, G),$$

为奇异 q-相对链群. 同理定义

奇异 q-相对闭链群: $Z_q(X, Y; G)=\ker(\partial')$,

奇异 q-相对边缘群: $B_q(X, Y; G)=\mathrm{Im}(\partial')$,

奇异 q-相对同调群: $H_q(X, Y; G)=Z_q(X, Y; G)/B_q(X, Y; G)$,

以及

奇异 q-Betti 数: $R_q(X, Y)=\mathrm{rank}\ H_q(X, Y; G)$.

显然, 当 $Y=\emptyset$ 时, $H_q(X, Y; G)=H_q(X, G)$.

关于奇异同调群的基本性质总结如下:

(1) 设 f: $(X, Y)\to(X', Y')$是连续对映射; 则存在一个群同态 f_*, 称之为是它的诱导同态,

$$f_*:\ H_q(X, Y; G)\to H_q(X', Y'; G).$$

满足:

a) 若 $f=id$, 则 $f_*=id$.

b) 又若 g: $(X', Y')\to(X'', Y'')$也是连续的; 则它诱导出的同态 g_* 满足

$$(gf)_*=g_*f_*.$$

c) $\partial f_*=f_*\partial$.

(2) (同伦不变性). 若 f, g: $(X, Y)\to(X', Y')$是同伦等价的, 则 $f_*=g_*$.

说到两个拓扑空间对(X, Y)与(X', Y')是同伦等价的, 是指存在着连续的

$$\varphi:\ (X, Y)\to(X', Y'),$$

以及 $$\psi:\ (X', Y')\to(X, Y),$$

满足: $$\psi\circ\varphi\simeq id_{(X,Y)},\quad \varphi\circ\psi\simeq id_{(X',Y')}.$$

因此, 若(X, Y)与(X', Y')同伦等价, 则

$$H_q(X, Y; G)\cong H_q(X', Y'; G)\ \text{是同构}.$$

我们说拓扑空间对(X', Y')是拓扑空间对(X, Y)的一个形变收缩, 是指: $X'\subset X$, $Y'\subset Y$, 并有 η: $[0, 1]\times X\to X$ 连续, 满足:

$$\eta(0,\cdot)=id_X,\ \eta(1,X)\subset X',\ \eta(1,Y)\subset Y',$$

$$\eta(t,Y)\subset Y,\quad 以及\quad \eta(t,\cdot)|_{X'}=id_{X'}\quad \forall t\in[0,1].$$

因此，当(X',Y')是(X,Y)的形变收缩时，

$$H_q(X,Y;G)\cong H_q(X',Y';G)是同构.$$

(3)（切除性质） 若$U\subset X$，满足：$\overline{U}\subset \mathrm{int}(Y)$；则

$$H_q(X\backslash U,Y\backslash U;G)\cong H_q(X,Y;G).$$

设$A,B,C,D,\cdots$表示群，$\to$表示同态，一个序列：$A\to B\to C\to D\to\cdots$称为是正合的，是指：前一个同态的象=后一个同态的核，即，若有$A\xrightarrow{h}B\xrightarrow{g}C$，则

$$\mathrm{Im}(h)=\ker(g).$$

设X,Y,Z是三个拓扑空间，$Z\subset Y\subset X$；那么内射$i:(Y,Z)\to(X,Z)$，$j:(X,Z)\to(X,Y)$都是拓扑空间对之间的连续映射. 它们诱导出的相对奇异同调群间的同态有下列性质：

(4)（正合性） 若$Z\subset Y\subset X$，则

$$\cdots\to H_q(Y,Z;G)\xrightarrow{i_*}H_q(X,Z;G)\xrightarrow{j_*}H_q(X,Y;G)$$

$$\xrightarrow{\partial}H_{q-1}(Y,Z;G)\to\cdots.$$

特别地，因为$H_q(X;G)=H_q(X,\emptyset;G)$，所以还有

$$\cdots\to H_q(Y;G)\xrightarrow{i_*}H_q(X,G)\xrightarrow{j_*}H_q(X,Y;G)$$

$$\xrightarrow{\partial}H_{q-1}(Y;G)\to\cdots.$$

需要解释一下的是同态：

$$H_q(X,Y;G)\xrightarrow{\partial}H_{q-1}(Y,G).$$

事实上，$\forall[C]\in H_q(X,Y;G)$，$\exists c\in Z_q(X,Y;G)$，$c\in[C]$，从而$\partial c=0(\mathrm{mod}\ Z_{q-1}(Y;G))$，即$\partial c\in Z_{q-1}(Y;G)$.

若$c_1,c_2\in[C]$，则$c_1=c_2(\mathrm{mod}\ Z_q(X,Y;G))$，或者说，$c_1-c_2=\partial w+r$，其中$w\in C_{q+1}(X)$，$r\in C_q(Y)$，推得：$\partial c_1-\partial c_2=\partial r\in B_{q-1}(Y,G)$，所以$\partial c_1$与$\partial c_2$属于同一同调类. 因此$\partial$诱导出同态：

$$H_q(X,Y;G)\to H_{q-1}(Y;G),$$

(5) 设 X 是由一族道路连通的分量 $\{X_k\}$ 组成的，则有同构：

$$H_q(X, Y; G) \cong \bigoplus \sum H_q(X_k, X_k \cap Y; G).$$

(6) $H_q(X, X; G) \cong 0$.

(7) $H_0(X, G)$是由 X 中道路连通分量个数个生成元生成的自由群. 又若 $Y \neq \emptyset$, $Y \subset X$, 而 X 是道路连通的; 则 $H_0(X, Y; G) \cong 0$.

(8) (Künneth 公式)

设 X 是一个拓扑空间, X_1, X_2 是它的子空间, 记 i_ν: $X_\nu \to X$ 为内射, $\nu = 1, 2$. 称一个三元系$(X; X_1, X_2)$是切除的, 如果

i_{1*}: $H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_q(X_1 \cup X_2, X_2)$是同构, $\forall q$.

不难证明, 它等价于:

i_{2*}: $H_q(X_2, X_1 \cap X_2) \cong H_q(X_1 \cup X_2, X_1)$是同构, $\forall q$.

也等价于:

(i_{1*}, i_{2*}): $H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \oplus H_q(X_2, X_1 \cap X_2)$

$\cong H_q(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2)$是同构, $\forall q$.

对于两个空间对(X, A), (Y, B), 设$(X \times Y, A \times Y, X \times B)$是一个切除的三元系. 又设 G 是一个域 Q, 则成立着公式:

$$H_q(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; Q)$$

$$\cong \bigoplus_{p=0}^{q} H_p(X, A; Q) \otimes H_{q-p}(Y, B; Q), \forall q.$$

有时, 不强调个别的 q-同调群, 而关心这一系列同调群, 我们用 $H_*(X, Y; G)$表示这个系列, Künneth 公式又表示成

$$H_*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; Q)$$

$$\cong H_*(X, A; Q) \otimes H_*(Y, B; Q).$$

在临界点理论中, 同调群的系数群 G 通常取成域 Q, 甚至更特别地只取 $\mathbb{Z}_2$ 域, 实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$. 对于系数为域 Q 的同调群, 实际上是域 Q 上的线性空间, 这时 Betti 数

$$\operatorname{rank} H_q(X, Y; Q) = \dim H_q(X, Y; Q).$$

我们又把 Betti 数的交错和

$$\chi(X, Y; Q)=\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q \operatorname{rank} H_q(X, Y; Q),$$

称为空间对(X, Y)的 Euler 示性数.

利用上述奇异同调群的基本性质，我们能算出许多拓扑空间的奇异同调群. 例如

1. n 维球面 S^n.

$$H_q(S^n, G)\cong\begin{cases}0, & q\neq n, \text{当 } q, n\geqslant 1,\\ G, & q=n\geqslant 1 \text{ 以及 } q=0, n\geqslant 1,\\ G^2, & q=n=0.\end{cases}$$

2. 相对同调群, B^n 为 n 维球, S^{n-1} 是它的边界, $n\geqslant 1$.

$$H_q(B^n, S^{n-1}; G)\cong\begin{cases}0, & q\neq n,\\ G, & q=n.\end{cases}$$

3. 环面 $T^n=S^1\times\cdots\times S^1$, n 次

$$H_q(T^n, G)=\begin{cases}G^{C_q^n}, & 0\leqslant q\leqslant n,\\ 0 & q>n.\end{cases}$$

其中 C_q^n 是组合数.

4. 实射影空间 P^n,

$$H_q(P^n, \mathbb{Z}_2)\cong\begin{cases}0, & q>n,\\ \mathbb{Z}_2, & q\leqslant n.\end{cases}$$

5. 复射影空间 $\mathbb{C}P^n$,

$$H_q(\mathbb{C}P^n, G)\cong\begin{cases}0, & q>2n \text{ 或 } q \text{ 为奇},\\ G, & 0\leqslant q\leqslant 2n \text{ 且 } q \text{ 为偶}.\end{cases}$$

1.2 奇异上同调

引入奇异 q-链群 $C_q(X, G)$以后，我们来考察它的对偶，即 $C_q(X, G)\to G$ 的同态. 把这同态的全体 $\mathrm{Hom}(C_q(X), G)$记作 $C^q(X, G)$, 称为奇异 q 上链群. 若 $c\in C^q(X, G)$, 即 $c: C_q(X, G)\to G$ 是同态，我们用$[\sigma, c]$表示 c 在奇异 q 链 σ 上的取值. 显然有等式:

$$[\sigma_1+\sigma_2, c]=[\sigma_1, c]+[\sigma_2, c],$$

$$[\sigma, c_1+c_2]=[\sigma, c_1]+[\sigma, c_2],$$
$$[g\sigma, c]=g[\sigma, c]=[\sigma, gc].$$
即[,]在 $C_q(X, G)\times C^q(X, G)$ 上是双线性的.

边缘算子 ∂, 关于这个双线性的[,], 有一个对偶算子 δ, 称之为上边缘算子:
$$[\partial\sigma, c]=[\sigma, \delta c].$$
因此 δ 是 $C^{q-1}(X, G)\to C^q(X, G)$ 的同态. 由 $\partial^2=0$ 导出上边缘算子的重要性质:
$$\delta^2 c=0, \quad \forall c\in C^q(X, G).$$
类似地, 称 $\ker(\delta)$ 为奇异上闭链群, 记作 $Z^q(X, G)$; 称 $\mathrm{Im}(\delta)$ 为奇异上边缘群, 记作 $B^q(X, G)$; 称商群 $Z^q(X, G)/B^q(X, G)$ 为奇异上同调群, 记作 $H^q(X, G)$, $\forall q$.

关于相对上同调群, 可以定义如下: 设 (X, Y) 是一个拓扑空间对, 定义相对上链群
$$\bar{C}^q(X, Y; G)=\mathrm{Hom}(C_q(X, G)/C_q(Y, G), G).$$
并定义相对上边缘算子 δ: $\bar{C}^{q-1}(X, Y)\to\bar{C}^q(X, Y)$ 为边缘算子 ∂': $C_q(X)/C_q(Y)\to C_{q-1}(X)/C_{q-1}(Y)$ 的对偶. 然后定义
$$H^q(X, Y)=\ker(\delta)/\mathrm{Im}(\delta).$$

也可以定义
$$C^q(X, Y; G)$$
$$=\{c\in C^q(X, G)\mid[\sigma, c]=0, \forall\sigma\in C_q(Y, G)\}.$$
不难证明: $\bar{C}^q(X, Y; G)$ 同构于 $C^q(X, Y; G)$. 这个同构是由同态映射 p: $C_q(X, G)\to C_q(X, G)/C_q(Y, G)$ 的对偶 p^*: $\bar{C}^q(X, Y; G)\to C^q(X, G)$ 实现的. 从而
$$Z^q(X, Y; G)\triangleq\ker(\delta)$$
$$=\{c\in C^q(X, G)\mid[\sigma, c]=0 \quad \forall\sigma\in B_q(X, Y; G)\},$$
$$B^q(X, Y; G)\triangleq\mathrm{Im}(\delta)\subset\{c\in C^q(X, G)\mid[\sigma, c]$$
$$=0\,\forall\sigma\in Z_q(X, Y; G)\}.$$
一般说来, 有正则同态:
$$\alpha: H^q(X, Y; G)\to H_q(X, Y; G)^*,$$

当 G 是域 Q 时，α 是在上的.

上同调群和同调群的性质非常类似. 重要的差别在于同调群是拓扑空间对的函子，而上同调群则是反变函子. 事实上，

(1′) 若 $f: (X, Y)\to(X', Y')$ 连续，则

$$f^*: H^*(X', Y'; G)\to H^*(X, Y; G),$$

满足

(a) 若 $f=id$，则 $f^*=id$.

(b) 又若 $g: (X', Y')\to(X'', Y'')$ 连续，则 $(gf)^*=f^*g^*$.

(c) $\delta f^*=f^*\delta$.

(2′) 若 $f, g: (X, Y)\to(X', Y')$ 连续，且 $f\sim g$，则 $f^*=g^*$. 又若 $(X, Y)\sim(X', Y')$，则 $H^*(X, Y; G)\cong H^*(X', Y'; G)$.

(3′) (切除性质) $H^*(X\backslash U, Y\backslash U; G)\cong H^*(X, Y; G)$，当 $U\subset \mathrm{int}(Y)$.

(4′) (正合序列). 当 $Z\subset Y\subset X$ 时，序列

$$\cdots\leftarrow H^q(Y, Z; G)\xleftarrow{i^*} H^q(X, Z; G)\xleftarrow{j^*} H^q(X, Y; G)$$
$$\xleftarrow{\delta} H^{q-1}(Y, Z; G)\leftarrow\cdots$$

是正合的，其中 $i: (Y, Z)\to(X, Z)$，$j: (X, Z)\to(X, Y)$ 是内射.

(5′) $H^q(p; G)\cong\begin{cases}G, & q=0,\\ 0, & q\neq 0,\end{cases}$

其中 p 是单点组成的空间.

(6′) (Künneth) 设 (X, A)，(Y, B) 是两个拓扑空间对. 又设 $(X\times Y, A\times Y, X\times B)$ 是一个切除的三元系，并且 $H^*(X, A; Q)$ 是有限型的，即其中每个 H^q 都是有限生成的，那么

$$H^*(X, A; Q)\otimes H^*(Y, B; Q)$$
$$\cong H^*(X\times Y, A\times Y\cup X\times B; G).$$

1.3 上积与卡积

奇异上同调群不但是一系列群，还可以引入乘积使之成为一个分次代数.

首先在$C^*(X, G)=\bigoplus_{q=0}^{\infty}C^q(X, G)$上，定义上积如下：设$c\in C^p(X, G)$，$d\in C^q(X, G)$，$\forall\sigma\in C_{p+q}(X, G)$考虑仿射映射

$$\lambda_p: \Delta_p\to\Delta_{p+q},$$

$$\rho_q: \Delta_q\to\Delta_{p+q},$$

为$\lambda_p=(e_0, \cdots, e_p)$，$\rho_q=(e_p, e_{p+1}, \cdots, e_{p+q})$，定义

$$[\sigma, c\cup d]=[\sigma\lambda_p, c][\sigma\rho_q, d].$$

上积在$C^*(X, G)$上是双线性的、结合的，并有么元，即0-上链1，定义为$[x, 1]=1$ $\forall x\in X$. 此外上边缘δ与上积间的关系由公式

$$\delta(c\cup d)=\delta c\cup d+(-1)^p c\cup\delta d$$

给出，其中$c\in C^p(X, G)$，$d\in C^q(X, G)$.

由此可见$Z^*(X)$是$C^*(X)$的一个子环，$B^*(X)$是在$Z^*(X)$中的一个双边理想. 于是上积$\cup$可以过渡到上同调群$H^*(X)$上去，使之成为一个分次代数. 此外，若$f: X\to Y$连续，则$f^*: H^*(Y)\to H^*(X)$是环同态：$f^*(c\cup d)=f^*(c)\cup f^*(d)$，满足$f^*\delta=\delta f^*$.

卡积是上积的对偶算子. $\cap: C_{p+q}(X)\times C^p(X)\to C_q(X)$，定义如下：$\forall c\in C^p(X)$，$\forall d\in C^q(X)$，$\forall\sigma\in C_{p+q}(X)$，$\sigma\cap c\in C_q(X)$由等式

$$[\sigma\cap c, d]=[\sigma, c\cup d]$$

唯一确定.

事实上，卡积可借助下式表达：

$$\sigma\cap c=[\sigma\lambda_p, c]\sigma\rho_q.$$

卡积与边缘算子间的关系由下式给出：

$$\partial(\sigma\cap c)=(-1)^p[(\partial\sigma)\cap c-\sigma\cap\delta c]$$

$\forall\sigma\in C_{p+q}(X)$；$c\in C^p(X)$. 若有$f: X\to Y$连续，则还有

$$f_*[\sigma\cap f^*(c)]=f_*(\sigma)\cap c.$$

因为$\forall\sigma\in Z_{p+q}(X)$，$c\in Z^p(X)$有$z\cap c\in Z_q(X)$，

$$\forall\sigma\in B_{p+q}(X),\ c\in Z^p(X)有z\cap c\in B_q(X).$$

所以卡积可以过渡到同调群，即

$$\cap: H_{p+q}(X)\times H^p(X)\to H_q(X).$$

对于相对情形，上面所有关于上积与卡积的结果都能推广．使得 $H^*(X, Y; G)$ 成为一个反交换的分次代数，而 $H_*(X, Y; G)$ 是 $H^*(X, Y; G)$ 的一个右酉模．实际上，对于相对奇异上同调群与奇异同调群间的卡积还可以扩充到如下形式：

$$\cap: H_{p+q}(X, Y; G) \times H^p(X, Y; G) \to H_q(X, G).$$

$$\cap: H_{p+q}(X, Y; G) \times H^p(X, G) \to H_q(X, Y; G).$$

1.4 上积长(cuplength)

因为 $H^*(X; G)$ 是一个反交换的分次代数．我们按照它上面的上积运算，定义上积长

$$\text{cuplength}(X) = \max\{l \in \mathbb{Z}_+ \mid \exists c_1, \cdots, c_l \in H^*(X), \dim(c_i) > 0, i=1, \cdots, l, \text{使得 } c_1 \cup \cdots \cup c_l \neq \theta\}.$$

关于上积长有一个重要的应用，它可以用来估计拓扑空间 X 的畴数．

定理 1.1 $\text{cat}(X) \geqslant \text{cuplength}(X)+1$.

证明 设 $m = \text{cuplength}(X)$，即 $\exists c_1, \cdots, c_m \in H^*(X, G)$，$\dim(c_i) = k_i > 0$，$i=1, \cdots, m$ 有 $c_1 \cup \cdots \cup c_m \neq 0$．兹证：$\text{cat}(X) \geqslant m+1$．倘若不然，$\exists X$ 的 m 个可收缩的闭集 $Y_1, \cdots, Y_m$，使得 $X = \bigcup_{i=1}^m Y_i$．考察正合序列

$$H^{k-1}(Y_i) \to H^k(X, Y_i) \xrightarrow{j^*} H^k(X) \to H^k(Y_i).$$

因为 $H^k(Y_i) \cong 0$, $\forall k \geqslant 1$，所以 j^* 是在上的；对 $c_i \in H^{k_i}(X)$，$\exists \hat{c}_i \in H^{k_i}(X, Y_i)$，使得 $j^*\hat{c}_i = c_i$，$i=1, \cdots, m$．但 $j^*(\hat{c}_1 \cup \cdots \cup \hat{c}_m) = c_1 \cup \cdots \cup c_m$．由上积定义直接推出：$\hat{c}_1 \cup \cdots \cup \hat{c}_m \in H^{k_1+\cdots+k_m}(X, Y_1 \cup \cdots \cup Y_m) = H^{k_1+\cdots+k_m}(X, X) \cong 0$．这便与假设矛盾．

为了说明用上积长估计畴数在微分方程中的应用，我们在此发挥第四章§2 指标理论中提出的两种途径中的第一种途径的思想．

由代数拓扑学知道，下列上积长：

例 1 实射影空间 P^n，

$$\text{cuplength}(P^n)=n,\ n=1,2,\cdots,\infty.$$

例 2 复射影空间 $\mathbb{C}P^n$,

$$\text{cuplength}(\mathbb{C}P^n)=n.$$

应用到第四章定理 3.9. 代替使用亏格, 把函数 $\hat{\mathbf{f}}$ 限制在实射影空间 P^n 上, 如今 $\tilde{\mathbf{f}}$ 是下方有界满足 P.S. 条件的 C^1 函数, 直接应用第四章定理 1.4, 即得 $\tilde{\mathbf{f}}$ 有 n 对不同的临界值, $n=1,2,\cdots,\infty$.

同理, 我们可以用复射影空间的上积长估计畴数来讨论 Ekeland–Lasry 定理.

§2 Morse 理论

在这一节, 我们介绍 Morse 理论的基本内容: 对于孤立临界点赋予一系列同调群来描写这函数在临界点附近的行为, 然后建立 Morse 不等式. Morse 引理以及胞腔粘合定理.

以下如不特别声明, 我们总假设 $\mathscr{X}$ 是一个实的、可分的 Hilbert 空间, 有内积 $(,)$.

2.1 临界群与 Morse 型数

设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$, x_0 是它的一个孤立临界点, 即 $\exists x_0$ 的邻域 U, 使得 x_0 是 $\mathbf{f}$ 在 U 内的唯一的临界点, 引入

定义 2.1 设 $\mathbf{f}(x_0)=c$, $\mathbf{f}$ 在 U 内只有 x_0 是临界点. 令 $C_q(x_0,\mathbf{f})=H_q(\mathbf{f}_c\cap U,(\mathbf{f}_c\backslash\{x_0\})\cap U;\ Q)$, $q=0,1,\cdots$; 则称 $C_*(x_0,\mathbf{f})$ 为 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处的*临界群*, 特别地, 称 $C_q(x_0,\mathbf{f})$ 为其 q 阶临界群.

按同调群的切除性质, 临界群与邻域 U 的特殊选择无关.

定义 2.2 临界群的秩, 即 $\text{rank}\,C_q(x_0,\mathbf{f})$ 称为 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处的 Morse 型数, 记作 $M_q(x_0,\mathbf{f})$, $q=0,1,2,\cdots$.

从定义直接可以计算出下列临界群.

例 1 设 x_0 是 $\mathbf{f}$ 的一个孤立局部极小点, 则

$$C_q(x_0,\ \mathbf{f})=\begin{cases}Q, & q=0,\\ 0, & q\neq 0.\end{cases}$$

例 2 设 $\dim\mathscr{X}<+\infty$，设为 m，又设 x_0 是 $\mathbf{f}$ 的孤立局部极大点，则

$$C_q(x_0,\ \mathbf{f})=\begin{cases}Q, & q=m,\\ 0, & q\neq m.\end{cases}$$

定义 2.3 设 $\mathbf{f}\in C^2(\mathscr{X},\ \mathbb{R}^1)$，$\mathbf{f}'(x_0)=\theta$. 称 x_0 是非退化的，如果 $\mathbf{f}''(x_0)$ 有有界逆. 否则，称 x_0 是退化的. 如果 $\mathbf{f}$ 的一切临界点都是非退化的，则称 $\mathbf{f}$ 为一个 Morse 函数.

由隐函数定理，若 x_0 非退化，则必是孤立的.

定义 2.4 设 $\mathbf{f}\in C^2(\mathscr{X},\ \mathbb{R}^1)$，$\mathbf{f}'(x_0)=\theta$. 又设 E_- 是使得 $\mathbf{f}''(x_0)$ 在其上成为负的 $\mathscr{X}$ 的极大线性子空间，即

$$E_-=\{x\in\mathscr{X}\mid(\mathbf{f}''(x_0)x,\ x)<0\ 当\ x\neq\theta\};$$

称 $\dim E_-$ 为 $\mathbf{f}$ 在 x_0 处的 Morse 指数.

我们首先要考察 Morse 型数与 Morse 指数之间的关系.

定理 2.1 设 $\mathbf{f}\in C^2(\mathscr{X},\ \mathbb{R}^1)$，$\theta$ 是 $\mathbf{f}$ 的一个非退化的，Morse 指数为 j 的临界点；则

$$C_q(\theta,\ \mathbf{f})\cong\begin{cases}Q, & 当\ q=j,\\ 0, & 当\ q\neq j.\end{cases}$$

证明 1° 用 Taylor 展开

$$\mathbf{f}(x)=\mathbf{f}(\theta)+\frac{1}{2}(\mathbf{f}''(\theta)x,\ x)+r(x),$$

其中 $r\in C^2(\mathscr{X},\ \mathbb{R}^1)$，满足：

$$r'(\theta)=\theta,\qquad r''(\theta)=0.$$

记 $A=\dfrac{1}{2}\mathbf{f}''(\theta)$. 则 A 自伴，有谱族 $\{E_\lambda\}$. 记 $P_-=E_{-0}$，$P_+=I-P_-$，则 $P_\pm$ 都是正交投影算子. 用 $\mathscr{X}_\pm$ 表示 $P_\pm$ 的投影空间，$A_\pm=\pm A|\mathscr{X}_\pm$；则

$$A=A_+P_+-A_-P_-.$$

因为 $\mathbf{f}$ 在 θ 非退化，所以 A 有有界逆，从而 $A_\pm$ 分别是 $\mathscr{X}_\pm$ 上的自伴正定算子，于是 $A_\pm^{\frac{1}{2}}$ 可以有定义。

$\forall x\in\mathscr{X}$，令

$$y_\pm = A_\pm^{\frac{1}{2}}P_\pm x,$$

则 $y_+\perp y_-$，再令 $y=y_++y_-$. 我们定义了一个线性同胚 $x\mapsto y$. 事实上，因为有

$$x=A_+^{-1/2}y_+-A_-^{-1/2}y_-.$$

这样一来，在这同胚下，

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(x)&=(A_+P_+x,\ P_+x)-(A_-P_-x,\ P_-x)+r(x)\\&=\|y_+\|^2-\|y_-\|^2+S(y)+\mathbf{f}(\theta),\end{aligned}$$

其中 $S(y)=r(x)$，记

$$\tilde{\mathbf{f}}(y)=\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(\theta),$$

$\tilde{\mathbf{f}}$ 是 $\mathbf{f}$ 在新坐标下的表示。

2° 因为还有：

$$S'(\theta)=\theta,\quad S''(\theta)=0,$$

所以 $\forall\varepsilon\in(0,\ 1)$，$\exists\gamma>0$，$\delta>0$ 使得

$$\frac{\gamma^2}{(2-\gamma)^2}<\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

以及当 $y\in B_\delta=\{y\in\mathscr{X}\mid\|y\|<\delta\}$ 时，

$$\|S'(y)\|<\gamma\|y\|,\quad |S(y)|<\varepsilon\|y\|^2.$$

从而当 $y\in B_\delta$ 时，有估计

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)\|y_+\|^2-(1+\varepsilon)\|y_-\|^2&\leqslant\tilde{\mathbf{f}}(y)\\&\leqslant(1+\varepsilon)\|y_+\|^2-(1-\varepsilon)\|y_-\|^2.\end{aligned}$$

用 C_ε 表示锥 $\left\{y\in\mathscr{X}\mid\|y_+\|\leqslant\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\|y_-\|\right\}$，可见 $C_\varepsilon\cap B_\delta\subset\tilde{\mathbf{f}}_0\cap B_\delta$.

3° 现在我们来构作一个形变收缩：

$$\eta(t,\ y)=y_-+(1-t)y_+,$$

将证：η：$[0,\ 1]\times(B_\delta\cap\tilde{\mathbf{f}}_0)\to B_\delta\cap\tilde{\mathbf{f}}_0$. 事实上，$\forall y\in B_\delta\cap\tilde{\mathbf{f}}_0$，$\eta(1,\ y)=y_-\in C_\varepsilon$. 又因 C_ε 是一个凸集，所以必有 $t^*\in[0,\ 1)$，使得 $\eta(t,\ y)\in C_\varepsilon\subset\tilde{\mathbf{f}}_0$，当 $t\geqslant t^*$；而 $\eta(t,\ y)\notin C_\varepsilon$ 当 $t<t^*$. 若令

$$\phi(t)=\widetilde{\mathbf{f}}(\eta(t,y))$$
$$=-\|y_-\|^2+(1-t)^2\|y_+\|^2+S(y_-+(1-t)y_+),$$

则有

$$\begin{aligned}\phi'(t)&=-2(1-t)\|y_+\|^2-(S'(y_-+(1-t)y_+),\ y_+)\\&\leqslant-2(1-t)\|y_+\|^2+\gamma\|y_-+(1-t)y_+\|\|y_+\|\\&\leqslant-(2-\gamma)(1-t)\|y_+\|^2+\gamma\|y_-\|\|y_+\|.\end{aligned}$$

而当 $t<t^*$ 时，由于

$$\eta(t,\ y)=y_-+(1-t)y_+\notin C_\varepsilon,$$

所以 $$(1-t)\|y_+\|\geqslant\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\|y_-\|\geqslant\frac{\gamma}{2-\gamma}\|y_-\|$$

便推出 $\phi'(t)\leqslant0$. 从而有

$$\widetilde{\mathbf{f}}(\eta(t,\ y))=\phi(t)\leqslant\phi(0)=\widetilde{\mathbf{f}}(y)\leqslant0.$$

总结起来便有

$$\eta(t,\ y)\subset\widetilde{\mathbf{f}}_0\cap B_\delta,\ \ \forall(y,\ t)\in\widetilde{\mathbf{f}}_0\cap B_\delta.$$

4° 这表明：$(P_-B_\delta,\ P_-B_\delta\backslash\{\theta\})$ 是 $(\widetilde{\mathbf{f}}_0\cap B_\delta,\ (\widetilde{\mathbf{f}}_0\backslash\{\theta\})\cap B_\delta)$ 的一个形变收缩．从而由同伦不变性，

$$\begin{aligned}C_q(\theta,\ \mathbf{f})&\cong C_q(\theta,\ \widetilde{\mathbf{f}})\\&\cong H_q(\widetilde{\mathbf{f}}_0\cap B_\delta,\ (\widetilde{\mathbf{f}}_0\backslash\{\theta\})\cap B_\delta;\ \mathbb{Z})\\&\cong H_q(P_-B_\delta,\ P_-B_\delta\backslash\{\theta\};\ \mathbb{Z})\\&\cong H_q(B^j,\ B^j\backslash\theta;\ \mathbb{Z}),\end{aligned}$$ 其中 B^j 是 j 维球.

注意到：在 $B^j\backslash\{\theta\}$ 内，$S^{j-1}(=\partial B^j)$ 是 $B^j\backslash\{\theta\}$ 的形变收缩核；所以又由同伦不变性，

$$H_*(B^j\backslash\{\theta\},\ S^{j-1};\ \mathbb{Z})\cong H_*(S^{j-1},\ S^{j-1};\ \mathbb{Z})\cong0.$$

再按正合序列

$$\begin{aligned}&H_q(B^j\backslash\{\theta\},\ S^{j-1})\to H_q(B^j,\ S^{j-1})\\&\quad\to H_q(B^j,\ B^j\backslash\{\theta\})\to H_{q-1}(B^j\backslash\{\theta\},\ S^{j-1}),\end{aligned}$$

便得到 $$H_q(B^j,\ S^{j-1})\cong H_q(B^j,\ B^j\backslash\{\theta\}).$$

当 $j<+\infty$ 时，按同调群的公式(§1.1)，

$$C_q(\theta,\ \mathbf{f})\cong H_q(B^j,\ S^{j-1};\ Q)\cong\begin{cases}Q, & 当\ q=j,\\0, & 当\ q\neq j.\end{cases}$$

当 $j=+\infty$ 时，由第四章推论 1.1，我们知道 S^∞ 在自身是可收缩的，按同伦不变性，$H_q(B^\infty, S^\infty; Q)\cong 0$，从而 $C_q(\theta, \mathbf{f})\cong 0$，$\forall q=0, 1, 2, \cdots$.

于是对于非退化临界点，临界群完全由这点的 Morse 指数决定．这是用奇异同调群对临界点所作的局部刻划．以下再从整体上进行考察．

2.2 Morse 不等式

定理 2.2 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$，满足 P.S. 条件．又设 c 是区间 $[a, b]$ 上唯一的临界值；只对应有穷个临界点；则

$$H_q(\mathbf{f}_b, \mathbf{f}_a)\cong H_q(\mathbf{f}_c, \mathbf{f}_c\backslash K_c),\ q=0, 1, \cdots \tag{2.1}$$

证明 按第二形变引理(第三章定理 1.6)，

$$H_q(\mathbf{f}_b, \mathbf{f}_a)\cong H_q(\mathbf{f}_c, \mathbf{f}_a). \tag{2.2}$$

又从第一形变引理(第三章定理 1.2)，

$$H_q(\mathbf{f}_c\backslash K_c, \mathbf{f}_a)\cong H_q(\mathbf{f}_a, \mathbf{f}_a)=0. \tag{2.3}$$

因为 $\mathbf{f}_a\subset\mathbf{f}_c\backslash K_c\subset\mathbf{f}_c$，再由奇异同调群的正合性，

$$\cdots\to H_q(\mathbf{f}_c\backslash K_c, \mathbf{f}_a)\to H_q(\mathbf{f}_c, \mathbf{f}_a)\to H_q(\mathbf{f}_c, \mathbf{f}_c\backslash K_c)$$
$$\to H_{q-1}(\mathbf{f}_c\backslash K_c, \mathbf{f}_a)\to\cdots.$$

利用等式(2.3)可见

$$0\to H_q(\mathbf{f}_c, \mathbf{f}_a)\to H_q(\mathbf{f}_c, \mathbf{f}_c\backslash K_c)\to 0,$$

即得同构：

$$H_q(\mathbf{f}_c, \mathbf{f}_a)\cong H_q(\mathbf{f}_c, \mathbf{f}_c\backslash K_c). \tag{2.4}$$

联合(2.2)(2.4)即得(2.1).

注意：如果 K_c 中的点都是非退化的，那么由隐函数定理，K_c 由孤立点组成；再由 P.S. 条件，K_c 只能由有穷个点组成．

又若 $K_c=\{z_1, \cdots, z_m\}$，选择 $\varepsilon>0$ 使得 $B(z_i, \varepsilon)\cap B(z_j, \varepsilon)=\emptyset$ 当 $i\neq j$，于是按切除性，

$$H_q(\mathbf{f}_c, \mathbf{f}_c\backslash K_c)$$

$$\cong H_q\left(\mathbf{f}_c\cap\bigcup_{j=1}^m B(z_j, \varepsilon), \mathbf{f}_c\cap\bigcup_{j=1}^m B(z_j, \varepsilon)\backslash K_c\right)$$

$$\cong\bigoplus\sum_{j=1}^m H_q(\mathbf{f}_c\cap B(z_j, \varepsilon), \mathbf{f}_c\cap(B(z_j, \varepsilon)\backslash\{z_j\}))$$

$$\cong\bigoplus\sum_{j=1}^m C_q(z_j, \mathbf{f}). \tag{2.5}$$

这引导我们去

定义 2.5 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$，又设它至多有孤立的临界值 $\cdots<c_{-2}<c_{-1}<c_0<c_1<\cdots$，并且每个临界值至多只有有穷个临界点. 称数

$$M_q=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\operatorname{rank}H_q(\mathbf{f}_{c_j+\varepsilon_j}, \mathbf{f}_{c_j-\varepsilon_j}; G),$$

其中 $\varepsilon_j<\operatorname{Min}(c_{j+1}-c_j, c_j-c_{j-1})$，$j=0, \pm1, \pm2, \cdots$，为 $\mathbf{f}$ 的 q-阶 Morse 型数，$q=0, 1, 2, \cdots$.

由形变引理，M_q 是有确定意义的，它们与 ε_j 的特殊选取无关，有下列几何解释：

定理 2.3 设 $\mathbf{f}$ 是一个 Morse 函数，满足 P.S. 条件；则 $\mathbf{f}$ 的 q 阶 Morse 型数是其 Morse 指数为 q 的临界点的个数.

证明 直接利用公式(2.5).

下面我们来讨论 Morse 不等式. 作假设

(A)设 $a<b$ 是 $\mathbf{f}$ 的正则值. 又设 $\mathbf{f}$ 在 $\mathfrak{M}=\mathbf{f}^{-1}[a, b]$ 上至多只有有穷个临界值，并且每个临界值只对应着有穷个临界点，每个临界点的临界群都是有穷秩的.

记

$$M_q=M_q(a, b)=\sum_{j=1}^m\operatorname{rank}H_q(\mathbf{f}_{c_j+\varepsilon_j}, \mathbf{f}_{c_j-\varepsilon_j}; Q),$$

其中 $c_1<c_2<\cdots<c_m$ 是 $\mathbf{f}$ 在 $\mathfrak{M}$ 上的一切临界值，记

$$\beta_q=\beta_q(a, b)=\operatorname{rank}H_q(\mathbf{f}_b, \mathbf{f}_a)$$

$q=0, 1, 2, \cdots$. 我们先写出 Morse 不等式，把它的证明放在后面.

定理2.4 设 $\mathbf{f}\in C^1(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$ 满足 $P.S.$ 条件，以及假设(A)，则成立着下列不等式

$$M_q-M_{q-1}+\cdots+(-1)^qM_0\geqslant\beta_q-\beta_{q-1}+\cdots+(-1)^q\beta_0,\tag{2.8}$$

$q=0,1,2,\cdots$. 此外，还有

$$\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^qM_q=\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q\beta_q,\tag{2.9}$$

只要此式左边的级数收敛.

注2.1 Morse 不等式(2.8)可以写成一种紧凑的形式. 定义两个形式幂级数

$$P(a,b;t)=\sum t^k\beta_k(a,b),\quad M(a,b;t)=\sum t^kM_k(a,b).$$

(2.8)等价于 $\exists Q(t)=\sum q_kt^k$, $q_k\geqslant0$ 使得

$$M(a,b;t)-P(a,b;t)=(1+t)Q(t).$$

定义2.6 空间对的实值函数 S 称为是次可加的，如果 $\forall Z\subset Y\subset X$ 都有

$$S(X,Z)\leqslant S(Y,Z)+S(X,Y).$$

因此，若有一列拓扑空间 $X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_n$，使得每个拓扑空间对 (X_i,X_{i-1}) 都在 S 的定义域内，则成立着

$$S(X_n,X_0)\leqslant\sum_{i=1}^{n}S(X_i,X_{i-1}).\tag{2.10}$$

对于任意一个拓扑空间对 (X,Y)，我们有

$$R_q(X,Y)=\operatorname{rank}H_q(X,Y;G)\quad(q\text{ 次相对 Betti 数}).$$

定义

$$S_q(X,Y)=\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}R_j(X,Y)\tag{2.11}$$

以及

$$\chi(X,Y)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^qR_q(X,Y).\tag{2.12}$$

如果(2.12)中的级数收敛，$\chi(X,Y)$ 就是 (X,Y) 的 Euler 示性数.

引理2.1 函数 R_q, S_q 是次可加的，而 Euler 示性数 χ 则是

可加的，即若 $Z\subset Y\subset X$，并且 $\chi(X,Y)$ 与 $\chi(Y,Z)$ 都是有穷的，则

$$\chi(X,Z)=\chi(X,Y)+\chi(Y,Z).$$

证明 1° 由正合性，

$$H_q(Y,Z)\to H_q(X,Z)\to H_q(X,Y)$$

立得

$$R_q(X,Z)\leqslant R_q(Y,Z)+R_q(X,Y).$$

2° 在一个正合序列

$$\xrightarrow{i} A\xrightarrow{j} B\to$$

中，因为 $A/\ker(j)\cong \mathrm{Im}(j)$，所以

$$\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}\mathrm{Im}(j)+\operatorname{rank}\mathrm{Im}(i).$$

用 $\varepsilon(A)$ 表示 $\operatorname{rank}\mathrm{Im}(i)=\operatorname{rank}\ker(j)$，则有

$$\operatorname{rank} A=\varepsilon(B)+\varepsilon(A). \tag{2.13}$$

把关系式(2.13)应用到正合序列

$$\to H_q(Y,Z)\to H_q(X,Z)\to H_q(X,Y)$$
$$\to H_{q-1}(Y,Z)\to\cdots\to 0$$

便得到

$$R_q(X,Y)=\varepsilon_q(X,Y)+\varepsilon_{q-1}(Y,Z), \tag{2.14}$$

$$R_q(X,Z)=\varepsilon_q(X,Z)+\varepsilon_q(X,Y), \tag{2.15}$$

$$R_q(Y,Z)=\varepsilon_q(Y,Z)+\varepsilon_q(X,Z), \tag{2.16}$$

所以有

$$R_q(Y,Z)+R_q(X,Y)-R_q(X,Z)$$
$$=\varepsilon_q(Y,Z)+\varepsilon_{q-1}(Y,Z). \tag{2.17}$$

这蕴含了

$$S_q(Y,Z)+S_q(X,Y)-S_q(X,Z)=\varepsilon_q(Y,Z)\geqslant 0.$$

即 S_q 是次可加的．

3° 为证 χ 的可加性，注意到如果 $\chi(X,Y)$ 及 $\chi(Y,Z)$ 的两个级数是收敛的，那么这意味着 $\exists q_0$ 正整数，

$$R_q(X,Y)=R_q(Y,Z)=0,\quad 当\ q>q_0.$$

利用(2.14)与(2.16)及 ε_q 的非负性，立得

$$\varepsilon_q(X,Y)=\varepsilon_q(Y,Z)=\varepsilon_q(X,Z)=0,\quad 当\ q>q_0.$$

从而再由(2.17)即得

$$\chi(X, Z)=\chi(X, Y)+\chi(Y, Z).$$

即 χ 是可加的.

现在我们回过来证明定理2.4.

定理2.4的证明 设 $\mathbf{f}$ 的在 $\mathfrak{M}$ 上的临界值为

$$a<c_1<c_2<\cdots<c_n<b,$$

每个 c_i 对应的临界点集 $K_{c_i}=\{z_1^{(i)}, \cdots, z_{l_i}^{(i)}\}$, $i=1, 2, \cdots, n$, 选择实数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使得

$$a=a_0<c_1<a_1<\cdots<c_n<a_n=b.$$

取 $\mathscr{X}=\{\mathbf{f}_{a_0}, \cdots, \mathbf{f}_{a_n}\}$ 为一组拓扑空间. 由于临界点的个数是有穷的. 依假设(A), $R_q(\mathbf{f}_{a_j}, \mathbf{f}_{a_{j-1}})$, $j=1, \cdots, n$, $q=0, 1, 2, \cdots$ 都是有穷数, 再由引理2.1, 得出

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}R_j(\mathbf{f}_{a_i}, \mathbf{f}_{a_{i-1}})\geqslant\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}R_j(\mathbf{f}_b, \mathbf{f}_a),$$

即是
$$\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}M_j\geqslant\sum_{j=0}^{q}(-1)^{q-j}\beta_j \quad q=0, 1, \cdots,$$

其中 $\beta_j=R_j(\mathbf{f}_b, \mathbf{f}_a)$. 这就是Morse不等式(2.8).

如果级数 $\sum(-1)^q M_q$ 收敛, 那么 $\exists q_0$, 当 $q\geqslant q_0$ 时 $M_q=0$, (2.8)蕴含了 $\beta_q=0$ 当 $q\geqslant q_0$. 再由(2.8), 即得当 $q\geqslant q_0$ 时为等式. 从而有

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j M_j=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\beta_j.$$

即得(2.9).

定理2.4只建立起两个水平集 $\mathbf{f}_b$ 与 $\mathbf{f}_a$ 之间的临界点个数与空间 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]$ 的拓扑性质间的联系, 然而, 因为 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]$ 依赖于函数 $\mathbf{f}$ 本身, 所以应用时不易确定.

这就促使我们从两方面去考虑这个问题. 第一方面, 考察紧流形 M 上的Morse不等式,

推论2.1 设 M^n 是一个紧 n 维 C^2 流形, $\mathbf{f}\in C^2(M^n, \mathbb{R}^1)$ 是一个Morse函数, 则下列不等式成立:

$$M_0 \geqslant \beta_0,$$
$$M_1 - M_0 \geqslant \beta_1 - \beta_0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$M_n - M_{n-1} + \cdots + (-1)^n M_0 = \beta_n - \beta_{n-1} + \cdots + (-1)^n \beta_0;$$

这里 M_j 是 Morse 指数为 j 的 $\mathbf{f}$ 的临界点的个数，而 β_j 是 M^n 的 j-Betti 数，即 $\mathrm{rank}\, H_j(M^n)$，$j=0, 1, \cdots, n$.

证明 只须对定理 2.4 的证明稍作修饰就得到了.

首先定理 2.4 中的 $\mathscr{X}$ 可以换成任意 Hilbert 流形(具自然的 Finsler 结构). 因为在那个定理的证明中，凡是涉及到形变引理的，在第四章中已被推广到 Finsler 流形，而定理 2.1 本身只是局部性的结论.

其次因为 M^n 是紧的，所以可以取 $a < \min\limits_{x \in M^n} \mathbf{f}(x)$，$b \geqslant \max\limits_{x \in M^n} \mathbf{f}(x)$. 这样一来，$M^n = \mathbf{f}^{-1}[a, b]$.

第二方面，考察有边界的区域 Ω，假设 $\partial\Omega$ 上每点 x 有一个单位外法方向 $n(x)$.

定义 2.7 设 Ω 是一个有边界的开区域，$\partial\Omega$ 上每点 x 有单位外法向量 $n(x)$，$\mathbf{f} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^1)$ 称为是满足正则边界条件的，如果

(1) $\mathbf{f}$ 在 $\bar{\Omega}$ 的一个开邻域内有定义，并且 $\mathbf{f}'(x) \neq \theta$，$\forall x \in \partial\Omega$.

(2) $(\mathbf{f}'(x), n(x)) > 0$，$\forall x \in \partial\Omega$.

对于满足正则边界条件的函数，有

推论 2.2 设 $\mathbf{f} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^1) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^1)$ 是一个 Morse 函数，又设 $\mathbf{f}$ 在 Ω 上满足正则边界条件，以及 P. S. 条件，则有下列 Morse 不等式：

$$M_0 \geqslant \beta_0,$$
$$M_1 - M_0 \geqslant \beta_1 - \beta_0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$M_n + (-1) M_{n-1} + \cdots + (-1)^n M_0 = \beta_n - \beta_{n-1} + \cdots + (-1)^n \beta_0,$$

其中 M_j 是 Morse 指数为 j 的 $\mathbf{f}$ 的临界点的个数，而 $\beta_j = \mathrm{rank} H_j(\Omega)$，$j=0, 1, \cdots, n$.

证明 注意到虽然 Ω 是有边界的，但负梯度流指向 Ω 的内

部，从而形变引理在这种区域上仍然成立，所以逐字搬用定理2.4，即得证明。

2.3 Morse 引理

Morse 引理，研究函数 f 在非退化临界点附近的行为，表明其局部微分同胚于一个标准的非退化的，以其 Morse 指数为指数的二次函数。在许多书上，Morse 不等式是基于这一引理导出的。除此之外，它还有许多其它的应用。我们在此考虑一个较为一般的 Morse 引理，它包括退化的但孤立的临界点情形在内。

定理2.5 设 $\mathscr{X}$，$\mathfrak{Y}$ 都是 Hilbert 空间，$F\in C^3(\mathscr{X}\times\mathfrak{Y}, \mathbb{R}^1)$，假设

(1) $$F'_x(\theta_1, \theta_2)=\theta, \tag{2.18}$$

(2) $$F''_{xx}(\theta_1, \theta_2)=A\in\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})\text{有有界逆}, \tag{2.19}$$

则存在 $\mathfrak{Y}$ 的 θ_2 邻域 U 和一个 C^3 映射 $x=x(y)$ 满足：

$$x(\theta_2)=\theta_1, \tag{2.20}$$

$$F'_x(x(y), y)=\theta, \tag{2.21}$$

以及 $\mathscr{X}\times\mathfrak{Y}$ 的一个 (θ_1, θ_2) 邻域 $V\times U\to\mathscr{X}$ 的可微映射 ξ 适合：

$$\xi'_x(\theta_1, \theta_2)=id_x, \tag{2.22}$$

$$F(x, y)=F(x(y), y)+\frac{1}{2}(F''_{xx}(\theta_1, \theta_2)\xi, \xi). \tag{2.23}$$

证明 1° 利用隐函数定理，方程

$$F'_x(x, y)=\theta$$

有解 $x(y)$ 适合(2.20)与(2.21)。令 $x'=x-x(y)$，为求 ξ 适合(2.22)与(2.23)，再令

$$\xi=R(x', y)x', \tag{2.24}$$

其中 $R(x, y)\in\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ 是待定的，在 (θ_1, θ_2) 邻域内对 (x, y) 可微的线性算子，我们希望有

$$R(\theta_1, \theta_2)=id_{\mathscr{X}}, \tag{2.25}$$

$$\frac{1}{2}(R^*F''_{xx}(\theta_1, \theta_2)Rx', x')=F(x, y)-F(x(y), y). \tag{2.26}$$

因为它们蕴含了所要的结论(2.20)与(2.21). 于是问题化归为求一个有界线性算子值的函数 R 使之满足(2.25)与(2.26).

2° 由分部积分公式:

$$F(x,\ y)-F(x(y),\ y)=\int_0^1 (F'_x(sx'+x(y),\ y),\ x')\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^1\left(\int_0^s F''_{xx}(tx'+x(y),y)x'\mathrm{d}t,x'\right)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^1 (1-t)\,(F''_{xx}(tx'+x(y),\ y)x',x')\mathrm{d}t,$$

作函数如下:

$$B(x',\ y)=2\int_0^1 (1-t)F''_{xx}(tx'+x(y),\ y)\mathrm{d}t.$$

它在 $\mathscr{X}\times\mathfrak{Y}$ 上有定义,取值于 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})$ 的一个闭子空间 $\mathrm{Adj}(\mathscr{X})$——一切有界自伴算子组成的 Banach 空间. 我们要求取值于 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{X})$ 的函数 $R(x',\ y)$ 适合

$$R^*F''_{xx}(\theta_1,\ \theta_2)R=B(x',\ y) \tag{2.27}$$

以及 $R(\theta_1,\theta_2)=id_{\mathscr{X}}$. 考察映射 $\mathfrak{G}:\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{X})\times\mathscr{X}\times\mathfrak{Y}\to\mathrm{Adj}(\mathscr{X})$,

$$\mathfrak{G}(R,\ x',\ y)=R^*F''_{xx}(\theta_1,\ \theta_2)R-B(x',\ y).$$

因为 $B(\theta_1,\ \theta_2)=F''_{xx}(\theta_1,\ \theta_2)$,所以

$$\mathfrak{G}(id_{\mathscr{X}},\ \theta_1,\ \theta_2)=0.$$

为证在 $(id_{\mathscr{X}},\ \theta_1,\ \theta_2)$ 的邻域内,方程(2.27)有解. 我们用隐函数定理,对 $\mathfrak{G}$ 求关于 R 的偏导数有

$$\mathfrak{G}'_R(R,\ x',\ y)C=C^*F''_{xx}(\theta_1,\ \theta_2)R+R^*F''_{xx}(\theta_1,\ \theta_2)C,$$
$$\forall C\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X}),$$

$\forall S\in Adj(\mathscr{X})$, 取 $C=\dfrac{1}{2}F''_{xx}(\theta_1,\ \theta_2)^{-1}S$, 则 $\mathfrak{G}'_R(id,\ \theta_1,\ \theta_2)=S$.

这表明 $\mathfrak{G}'_R(id,\ \theta_1,\ \theta_2)$ 是在上的.

另外, $\mathfrak{G}'_R(id,\ \theta_1,\ \theta_2)$ 又是双裂的: 记

$\mathrm{Anti}(\mathscr{X})$ 为 $\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{X})$ 中一切反对称有界线性算子组成的 Banach 空间, 即 $\{C\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\ \mathscr{X})\mid C^*=-C\}$; 则有

$$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})=\mathrm{Adj}(\mathscr{X})\oplus\mathrm{Anti}(\mathscr{X}),$$

以及 $\quad\ker(\mathfrak{G}'_R(id,\ \theta_1,\ \theta_2))=F''_{xx}(\theta_1,\ \theta_2)^{-1}\mathrm{Anti}(\mathscr{X}),$

应用隐函数定理，$\exists(\theta_1, \theta_2)$ 的一个邻域 $V\times U$，以及 B: $V\times U \xrightarrow{C^1} \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ 适合方程(2.27).

代回(2.24)得 ξ，且有

$$\xi'_x(\theta_1, \theta_2) = id_{\mathscr{X}}.$$

定理 2.6 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间，$\mathbf{f}\in C^3(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$，$\theta$ 是它的一个孤立临界点. 又设 $\mathbf{f}''(\theta)$ 有核 $N=\ker(\mathbf{f}''(\theta))$，并且 0 至多是 $\mathbf{f}''(\theta)$ 的一个孤立谱点；则必存在 θ 的一个邻域 V，$V\to\mathscr{X}$ 内的一个微分同胚 Φ，以及从 N 的 θ 邻域 $U\to N^{\perp}$ 的可微映射 h 使得

$$\Phi(\theta)=\theta, \quad h(\theta)=\theta,$$

$$\mathbf{f}(\Phi(z, y)) = \frac{1}{2}(\|P_+z\|^2 - \|P_-z\|^2) + \mathbf{f}(h(y)+y),$$

其中 $(z, y)\in N^{\perp}\times N$，而 $P_{\pm}$ 是 $\mathbf{f}''(\theta)$ 对应的正谱与负谱的正交投影算子.

证明 分解空间 $\mathscr{X}=N^{\perp}\oplus N$，记 θ_1, θ_2 分别为 $N^{\perp}$ 与 N 上的零点. 并分解 $x=z+y$, $(z, y)\in N^{\perp}\times N$. 则

$$\mathbf{f}'_z(\theta_1, \theta_2)=\theta,$$

$$\mathbf{f}''_{zz}(\theta_1, \theta_2)=A\in\mathscr{L}(N^{\perp}, N^{\perp}) \text{ 有有界逆.}$$

应用定理 2.5，可得 $h\in C^3$，以及连续可微的 ξ 使得 ξ 在 $\mathscr{X}$ 的一个 θ 邻域上定义，取值于 $N^{\perp}$，$\xi'_z(\theta)=id_{N^{\perp}}$ 而

$$\mathbf{f}(x)=\mathbf{f}(z+y)=\mathbf{f}(h(y)+y)+\frac{1}{2}(\mathbf{f}''_{zz}(\theta_1, \theta_2)\xi, \xi).$$

令
$$\Psi(z, y)=(\xi(z, y), y).$$

注意到 $\xi'_z(\theta_1, \theta_2)=id_{N^{\perp}}$，所以 $\Psi'(\theta)$ 有有界逆，这使导出局部逆 $\Phi_1=\Psi^{-1}$. 又因为 $A=\mathbf{f}''_{zz}(\theta)$ 是自伴算子，$A=P_{N^{\perp}}\mathbf{f}''(\theta)|N^{\perp}$，其中 $P_{N^{\perp}}$ 表示到 $N^{\perp}$ 的正交投影. 而 $\mathbf{f}''(\theta)$ 至多只以 0 为孤立谱点. 所以有分解 $A=A_+P_+-A_-P_-$，其中 $P_{\pm}$ 分别对应着 A 的正、负谱对应的不变子空间的投影，$A_{\pm}$ 都是正定的算子. 作线性变换：$T=(A_+^{\frac{1}{2}}P_+-A_-^{\frac{1}{2}}P_-)+P_N$，则 T 是一个线性同胚，令 $\Phi=\Phi_1\cdot T^{-1}$，即得

$$\mathbf{f}(\Phi(z,\ y))=\mathbf{f}(y+h(y))+\frac{1}{2}(\|P_+z\|^2-\|P_-z\|^2).$$

作为一个特殊情形，我们有

定理 2.7(Morse 引理) 设 $\mathbf{f}\in C^3(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$，$\theta$ 是它的一个非退化临界点，则必存在 θ 邻域的一个局部微分同胚 ξ，使得

$$\mathbf{f}(x)=\mathbf{f}(\theta)+\frac{1}{2}(\mathbf{f}''(\theta)\xi(x),\ \xi(x)).$$

证明 在上定理中 $N=\{\theta\}$，ξ 直接取成 $R(x)x$ 即得.

注 2.2 定理 2.7 中的函数 $\mathbf{f}\in C^3(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$ 的假设可以减弱到与定理 2.4 一致，即只须设 $\mathbf{f}\in C^2(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$. 关于这点，请看 N. H. Kuiper[Ku1] 以及张恭庆[Ch9].

2.4 胞腔粘合

现在我们来看当水平集跨越只有非退化临界点的临界值时，水平集的拓扑结构发生怎样的变化？

定理 2.8 设 $\mathbf{f}\in C^2(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$，满足 P. S. 条件；又设 c 是它的一个孤立临界值，$K_c=\{z_1,\ \cdots,\ z_l\}$ 都是非退化临界点；则 $\exists\varepsilon>0$，使得

$$\mathbf{f}_{c+\varepsilon}\sim\mathbf{f}_{c-\varepsilon}\cup h_1(B^{m_1})\cup\cdots\cup h_l(B^{m_l}),\tag{2.28}$$

适合：

$$\mathbf{f}_{c-\varepsilon}\cap h_i(B^{m_i})=\mathbf{f}^{-1}(c-\varepsilon)\cap h_i(B^{m_i})=h_i(\partial B^{m_i});\tag{2.29}$$

其中 m_i 是 z_i 的 Morse 指数，B^{m_i} 是 m_i 维球，h_i: $B^{m_i}\to E_-^{m_i}\times\{z_{i+}\}$ 是同胚映射，$E_-^{m_i}$ 对应着 $\mathbf{f}''(z_i)$ 的极大负不变子空间，而 $z_i=z_{i+}+z_{i-}$，$(z_{i+},\ z_{i-})\in E_-^{m_i}\times E_-^{m_i}$；还有 $h_i(\theta)=z_i$，$i=1,\ \cdots,\ l$.

证明 我们来构作一系列形变收缩.

1° 由第三章定理 1.6 有形变收缩：$\mathbf{f}_{c+\varepsilon}\sim\mathbf{f}_c$.

2° $\forall z_i\in K_c$，取中心在 z_i，$\delta_i>0$ 为半径的球 $B(z_i,\ \delta_i)$，适合 $B(z_i,\ \delta_i)\cap B(z_j,\ \delta_j)=\emptyset$，$i\neq j$. 取 $N=\bigcup\limits_{i=1}^{l}B(z_i,\ \delta_i)$，对 $\bar{N}$ 应用第四章定理 1.4，有形变 η，使得 $\eta(\mathbf{f}_{c+\varepsilon}\backslash\mathring{N})\subset\mathbf{f}_{c-\varepsilon}$，并且 $\eta(\mathbf{f}_c)\subset(\mathbf{f}_c\cap N)\cup\mathbf{f}_{c-\varepsilon}$,

3° 上述 $\delta_i>0$ 事先可以取得足够小，以致按 Morse 引理，在 $B(z_i, \delta_i)$ 上 $\mathbf{f}$ 局部同胚于标准的二次函数．作局部同胚后，函数 $\tilde{\mathbf{f}}(y)=\mathbf{f}(x)$，其中 $y=y(x)$ 是这同胚，呈如下形式：

$$\tilde{\mathbf{f}}(y)=\frac{1}{2}(\|Py\|^2-\|(I-P)y\|)+c.$$

作形变：

$$\eta(t, y)=\begin{cases} y_-+\left(1+t\left(\frac{1}{\|y_+\|}\sqrt{\max\{\|y_-\|^2-\varepsilon,\ 0\}}-1\right)y_+,\right. \\ \qquad\qquad 当\ y\in\tilde{\mathbf{f}}_c\cap B(z_i,\ \delta_i)\backslash\tilde{\mathbf{f}}_{c-\varepsilon} \\ y, \qquad\qquad 当\ y\in\tilde{\mathbf{f}}_{c-\varepsilon}, \end{cases}$$

其中 $y_+=Py$，$y_-=(I-P)y$，而 P 是到 E^{m_i} 的正交投影．因此，

$$(\tilde{\mathbf{f}}_c\cap B(z_i,\ \delta_i))\cup\tilde{\mathbf{f}}_{c-\varepsilon}\sim\tilde{\mathbf{f}}_{c-\varepsilon}\cup B^{m_i}.$$

把形变 η 与同胚 y 复合起来就得到所要的 h_i^{-1}，$i=1, \cdots, l$．显然，如此构作的 $h_1, \cdots, h_l$ 满足(2.28)与(2.29)．

注 2.3　定理 2.8 也可以不通过 Morse 引理，而通过直接构造一系列形变得证．参看张恭庆[Ch6]，这种直接方法可以绕过 Kuiper [Kui]，只要 $\mathbf{f}\in C^2$ 即可．

注 2.4　定理 2.8 表明 $\mathbf{f}_{c+\varepsilon}$ 与 $\mathbf{f}_{c-\varepsilon}\cup h_1(B^{m_1})\cup\cdots\cup h_l(B^{m_l})$ 有相同的伦型．每个 $h_i(B^{m_i})$ 是一个胞腔．$\mathbf{f}_{c+\varepsilon}$ 在伦型上是 $\mathbf{f}_{c-\varepsilon}$ 粘合上有穷个不同维数的胞腔．所以定理 2.8 也称为胞腔粘合定理．

注 2.5　因为 Hilbert-Riemann 流形上每个小邻域可以化归平直空间去考察，而在整体上我们已经建立了流和形变，所以定理 2.8 可以毫无困难地推广到 C^2 Hilbert-Riemann 流形．

注 2.6　对于 Finsler 流形上的 Morse 理论，主要的困难在于如何定义非退化临界点．因为在 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上，若 $\mathbf{f}\in C^2(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$，则 $\mathbf{f}''(x)\in\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X}^*)$，所以一般来说，不能假设 $\mathbf{f}''(x)$ 有有界逆．关于非退化性定义的讨论以及相应的胞腔粘合定理，请看 Uhlenbeck[Uhl]，Tromba[Tr. 1]，张恭庆[Ch6]．

下面我们再建立临界群的交错和与 Leray-Schauder 度的关系．因其证明较复杂，我们满足于对特殊情形加以验证，而把一般

情形留给读者，参阅张恭庆[Ch9]。

定理 2.9 设 $\mathbf{f}\in C^2(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$ 满足 P.S. 条件，又设 $\mathbf{f}'(x)=x-Tx$，其中 T 是一个紧映射，若 p_0 是 $\mathbf{f}$ 的一个孤立临界点，则存在 p_0 的一个邻域 U，使得 p_0 是 $\mathbf{f}$ 在 $\overline{U}$ 上的唯一临界点满足：

$$\deg(id-T, U, \theta)=\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q \operatorname{rank} C_q(\mathbf{f}, p_0).$$

我们只对 p_0 是 $\mathbf{f}$ 的非退化临界点情形给予证明。这时，若 $\mathbf{f}''(p_0)=id-T'(p_0)$ 的指标为 j，(因 $T'(p_0)$ 紧)，则由同伦不变性及第一章命题 4.1′，有 U 使

$$\deg(id-T, U, \theta)=\deg(id-T'(p_0), U, \theta)=(-1)^j.$$

再由定理 1.1，又有

$$C_q(\mathbf{f}, p_0)=\delta_{qj}G;$$

即得
$$\deg(id-T, U, \theta)=\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q \operatorname{rank} C_q(\mathbf{f}, p_0).$$

注 2.7 当 $\mathscr{X}$ 是一紧流形时，这定理称为 Poincaié-Hopf 定理，参看 Milnor[Mi2]，或 Guillemin-Pollak[Gp1]。上述形式的定理看 Rothe[Ro3]，张恭庆[Ch9]。

§3 几个临界点定理

现在我们要把上一节的 Morse 理论应用到具体问题。本节所讨论的几个定理只是这种应用的几个例子。它们带有一定的普遍性，为下一节中的微分方程问题应用 Morse 理论提供框架。

3.1 一个三临界点定理

定理 3.1 设 $\mathbf{f}$ 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 上的一个 C^2 实值函数，满足 P.S. 条件，并且是下半有界的。又设 $\mathbf{f}$ 有一个非退化的、非极小、具有穷指标的临界点 x_0；则 $\mathbf{f}$ 至少有三个临界点。

证明 因为 $\mathbf{f}$ 下半有界，满足 P.S. 条件，按第二章推论 1.3，它必有一个临界点是最小值点 $\hat{x}$，记 $c=\mathbf{f}(\hat{x})=\inf\limits_{x\in\mathscr{X}}\mathbf{f}(x)$。不失一

般性，不妨设最小值点是唯一的．并且由假设 $x_0\neq\hat{x}$．设 $m=\mathbf{f}(x_0)$．

以下用反证法：倘若这个 $\mathbf{f}$ 除 x_0 及 $\hat{x}$ 外，不再有其它临界点．记 $b=m+1$，则

$$(\mathscr{X}\setminus\mathbf{f}_b)\cap K=\emptyset.$$

现在取 $\varepsilon\in(0,1)$ 使得 $c+\varepsilon<m$，从而有

$$\emptyset\subset\mathbf{f}_{c+\varepsilon}\subset\mathbf{f}_b. \tag{3.1}$$

对这三个拓扑空间 $\emptyset$, $\mathbf{f}_{c+\varepsilon}$, $\mathbf{f}_b$ 应用 Euler 示性数的可加性，应有等式

$$\chi(\mathbf{f}_b,\emptyset)=\chi(\mathbf{f}_b,\mathbf{f}_{c+\varepsilon})+\chi(\mathbf{f}_{c+\varepsilon},\emptyset). \tag{3.2}$$

我们分别来计算这三个数．

(1) 在 $(c+\varepsilon, b)$ 间有唯一的非退化临界点 x_0，由定理 2.2 和定理 2.1，以及切除性，

$$H_q(\mathbf{f}_b,\mathbf{f}_{c+\varepsilon})=C_q(x_0,\mathbf{f})=\begin{cases}Q, & 当\ q=j,\\ 0, & 当\ q\neq j,\end{cases}$$

其中 $j=\operatorname{index}d^2\mathbf{f}(x_0)$．从而

$$\chi(\mathbf{f}_b,\mathbf{f}_{c+\varepsilon})=(-1)^j. \tag{3.3}$$

(2) 在 $\mathbf{f}_{c+\varepsilon}$ 内 $\mathbf{f}$ 只有唯一的临界点 $\hat{x}$，从而

$$\begin{aligned}H_q(\mathbf{f}_{c+\varepsilon},\emptyset)&=C_q(\hat{x},\mathbf{f})=H_q(\mathbf{f}_c,\emptyset)\\&=H_q(\{\hat{x}\},\emptyset)=\begin{cases}Q, & 当\ q=0,\\ 0, & 当\ q\neq 0.\end{cases}\end{aligned}$$

从而

$$\chi(\mathbf{f}_{c+\varepsilon},\emptyset)=1. \tag{3.4}$$

(3) 再求 $\chi(\mathbf{f}_b,\emptyset)$．利用流

$$\begin{cases}\dot{u}(t,u_0)=-\dfrac{(\mathbf{f}(u_0)-b)\mathrm{d}\mathbf{f}(u)}{\|\mathrm{d}\mathbf{f}(u)\|^2},\\ u(0,u_0)=u_0\in\mathscr{X}\setminus\mathbf{f}_b,\end{cases}$$

我们可以作出 $\mathscr{X}$ 到 $\mathbf{f}_b$ 的形变收缩：

$$\pi(t,u_0)=\begin{cases}u(t,u_0), & 当\ u_0\notin\mathbf{f}_b,\\ u_0, & 当\ u_0\in\mathbf{f}_b.\end{cases}$$

这表明 $$H_q(f_b)=H_q(\mathscr{X})=\begin{cases}Q, & 当 q=0,\\ 0, & 当 q\neq 0.\end{cases}$$

这是因为 $\mathscr{X}$ 是可收缩的，即得

$$\chi(f_b,\ \emptyset)=1. \tag{3.5}$$

这与等式(3.2)，(3.3)，(3.4)矛盾

注 3.1 在 $\dim\mathscr{X}<+\infty$，并且 $f(x)\to+\infty$ 当 $\|x\|\to\infty$ 的情形，这个结果是Красносельский[Kra 2]得到的．同样的结果为Castro Lazer[CL1]重新发现．但他们的证明与这里给出的都不相同．本定理的结论与证明都是作者给出的，见张恭庆[Ch5]．随后，Amann 沿着 Красносельский 的想法，用Leray-Schauder度理论．在 $f'=id-K$，其中 K 是一个紧算子的情形，证明了定理3.1[Ama2]．张恭庆[Ch6，8]在把Morse理论推广到Banach空间(流形)以后，把这定理更推广到Banach-Finsler流形，参看张恭庆[Ch6，8]．

3.2 分歧问题

和非线性本征值问题相近，分歧问题也研究带参数 λ 的算子方程

$$F(x,\ \lambda)=\theta \tag{3.6}$$

的解．但前者只要求找到 $x\neq\theta$ 以及 $\lambda\in\mathbb{R}^1$(或 $\mathbb{C}^1$)使(3.6)成立，而后者则还要求了解解 x 是怎样随 λ 变化的．特别地，如果已知

$$F(\theta,\ \lambda)\equiv\theta\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}^1, \tag{3.7}$$

那么问：对哪些点 $(\theta,\ \lambda_0)$，在它的任意一个邻域内，方程(3.6)都有非平凡解 $(x,\ \lambda)$，$x\neq\theta$？具有这种性质的点 $(\theta,\ \lambda_0)$ 就称为分歧点．

在此，设 $\mathscr{X}$ 是一个Banach空间，$F:\mathscr{X}\times\mathbb{R}^1\to\mathscr{X}$ 是连续的，并在 $\{\theta\}\times\mathbb{R}^1$ 的邻域内有连续的偏导数 F'_x．还假定(3.7)成立．

由隐函数定理，我们知道，如果 $F'_x(\theta,\ \lambda_0)$ 有有界逆，那么在 $(\theta,\ \lambda_0)$ 的一个域邻内，方程(3.6)只有平凡解 $x(\lambda)\equiv\theta$．换句话说，$(\theta,\ \lambda_0)$ 不是分歧点．因此，为了 $(\theta,\ \lambda_0)$ 是分歧点，$F'_x(\theta,\ \lambda_0)$ 必

须是奇异的.

然而，分歧点的这个必要条件，一般说来不是充分的. 以$\mathscr{X}=\mathbb{R}^2$为例，若

$$F(x,\ y;\ \lambda)=\begin{pmatrix}(1-\lambda)x-y^3\\ x^3+(1-\lambda)y\end{pmatrix},$$

则
$$F(0,\ 0;\ \lambda)\equiv\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad F'_{(x,y)}(0,\ 0;\ 1)=0.$$

但$(0,\ 0;\ 1)$却不是一个分歧点；因为

$$F(x,\ y;\ \lambda)=\theta\Leftrightarrow\begin{cases}(1-\lambda)x=y^3\\ x^3+(1-\lambda)y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=0.$$

利用 Leray-Schauder 度理论，Красносельский[Kra1]曾对$F(x,\lambda)=x-\lambda Lx+H(x,\lambda)$，其中$L$是$\mathscr{X}$上的线性紧算子，而$H(x,\lambda)=o(\|x\|)$，对$\lambda$(局部)一致的情形，证明了：当$\lambda_0$是$L$的奇数重本征值时，$(\theta,\lambda_0)$是$F$的一个分歧点. 一般来说，奇数重的假设是不能省略的.

然而，当$\mathscr{X}$是一个 Hilbert 空间时，并且若有$\mathbf{f}\in C^2(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$，则如下形式的算子：

$$F(x,\ \lambda)=\mathbf{f}'(x)-\lambda x \tag{3.8}$$

却有更强的结论.

定理3.2 设$\mathscr{X}$是一个 Hilbert 空间，$\mathbf{f}\in C^2(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$，$\mathbf{f}'(\theta)=\theta$. 又设$\lambda_0$是$\mathbf{f}''(\theta)$的一个有穷重、孤立本征值；则$(\theta,\lambda_0)$是方程(3.8)的一个分歧点.

为了证明这个定理，我们先把方程(3.8)用 Ляпунов-Schmidt 手续约化到有穷维. 令

$$L=\mathbf{f}''(\theta),\quad H(x)=\mathbf{f}'(x)-Lx,\quad \mu=\lambda-\lambda_0;$$

(3.8)等价于

$$(L-\lambda_0)x+H(x)=\mu x. \tag{3.9$_\mu$}$$

因为
$$\mathrm{Im}(L-\lambda_0 I)=\ker(L-\lambda_0 I)^\perp,$$

令P表$\mathscr{X}\to\mathscr{X}_1=\ker(L-\lambda_0 I)$的正交投影，所以$(3.9)_\mu$又等价于

$$\begin{cases}(L-\lambda_0 I)x_2+(I-P)H(x_1+x_2)=\mu x_2, & (3.10)\\ PH(x_1+x_2)=\mu x_1, & (3.11)\end{cases}$$

其中 $x_1=Px$, $x_2=x-x_1$. 先解(3.10), 得到 θ 的邻域 $U_1\times U_2$, 正数 $\delta>0$, 以及 $\varphi: U_1\times(-\delta, \delta)\xrightarrow{C^1}U_2$, 使得 $x_2=\varphi(x_1, \mu)$ 是(3.10)的解. 从而方程 $(3.9)_\mu$ 等价于下列有穷维方程:

$$PH(x_1+\varphi(x_1, \mu))=\mu x_1. \qquad (3.12)_\mu$$

因为在 $\ker(L-\lambda_0 I)^\perp$ 上, 当 $|\mu|\leqslant\delta$ 时, $L-(\lambda_0+\mu)I$ 有有界逆, 从而

$$\|\varphi(x_1, \mu)\|=o(\|x_1\|),$$

$$\text{当 } \|x_1\|\to 0, \text{ 对 } |\mu|\leqslant\delta \text{ 一致}. \qquad (3.13)$$

值得注意的是: 方程 $(3.12)_\mu$ 还是有穷维空间 $\mathscr{X}_1$ 上的一族函数 $J_\mu(u)$ 的 Euler 方程:

$$\begin{aligned}J_\mu(u)&=\mathbf{f}(u+\varphi(u, \mu))-\frac{\lambda}{2}(\|u\|^2+\|\varphi(u, \mu)\|^2)\\&=-\frac{1}{2}\mu\|u\|^2+\frac{1}{2}(L\varphi, \varphi)-\frac{\lambda}{2}\|\varphi\|^2+g(u+\varphi),\end{aligned}$$

其中 $(u, \mu)\in\mathscr{X}_1\times(-\delta, \delta)$, 而

$$g(x)=\mathbf{f}(x)-\frac{1}{2}(Lx, x).$$

在证明定理 3.2 之前, 我们讨论 Morse 型数在连续扰动下的变化性态

定理3.3　设 U 是 $\mathscr{X}$ 中 p_0 的一个闭邻域, 又设 p_0 是满足 P. S. 条件的 $\mathbf{f}, \in C^1(U, \mathbb{R}^1)$ 在 U 内的唯一临界点; 则必有 $\varepsilon>0$, 当 $g\in C^1(U, \mathbb{R}^1)$, 满足 P. S. 条件, 而且 $\|g-\mathbf{f}\|_{C(U)}<\varepsilon$ 时, 只要 p_0 还是 g 的在 U 内的唯一临界点, 就有

$$M_q(p_0, \mathbf{f})\leqslant M_q(p_0, g), \quad q=0, 1, 2, \cdots.$$

证明　设 $c=\mathbf{f}(p_0)$, 设 $0<M<\sup\{|\mathbf{f}(x)-c|\,|x\in U\}$. 取 $\varepsilon=\frac{1}{8}M$. 则当 $|g-\mathbf{f}|_{C(U)}<\varepsilon$ 时

$$\mathbf{f}_{c-3\varepsilon}\subset g_{c-2\varepsilon}\subset\mathbf{f}_{c-\varepsilon}\subset\mathbf{f}_{c+\varepsilon}\subset g_{c+2\varepsilon}\subset\mathbf{f}_{c+3\varepsilon}.$$

观察下图:

$$
\begin{array}{l}
H_{q+1}(\mathbf{f}_{c+3\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c+\varepsilon}) \to H_q(\mathbf{f}_{c+\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \xrightarrow{i_*} H_q(\mathbf{f}_{c+3\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \\
\quad \to H_q(\mathbf{f}_{c+3\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c+\varepsilon})
\end{array}
$$

$$
H_q(\mathbf{f}_{c+\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \xrightarrow{\alpha_*} H_q(g_{c+2\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \xrightarrow{\beta_*} H_q(\mathbf{f}_{c+3\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon})
$$

$$
\begin{array}{l}
H_q(\mathbf{f}_{c-\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \to H_q(g_{c+2\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \xrightarrow{i_{1*}} H_q(g_{c+2\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-\varepsilon}) \\
\quad \to H_{q-1}(\mathbf{f}_{c-\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon})
\end{array}
$$

$$
H_q(g_{c+2\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \xrightarrow{\alpha_{1*}} H_q(g_{c+2\varepsilon},\ g_{c-2\varepsilon}) \xrightarrow{\beta_{1*}} H_q(g_{c+2\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-\varepsilon})
$$

其中 α: $(\mathbf{f}_{c+\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \to (g_{c+2\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon})$, β: $(g_{c+2\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \to (\mathbf{f}_{c+3\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon})$, α_1: $(g_{c+2\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \to (g_{c+2\varepsilon},\ g_{c-2\varepsilon})$, β_1: $(g_{c+2\varepsilon},\ g_{c-2\varepsilon}) \to (g_{c+2\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-\varepsilon})$ 而 $i=\beta\circ\alpha$, $i_1=\beta_1\circ\alpha_1$. 由于 $H_q(\mathbf{f}_{c+3\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c+\varepsilon})\cong 0$, 以及 $H_q(\mathbf{f}_{c-\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon})\cong 0$, 所以 i_* 与 i_{1*} 都是同构, 从而 α_* 与 α_{1*} 都是内射.

记 $h=\alpha_{1*}\alpha_*$; $H_q(\mathbf{f}_{c+\varepsilon},\ \mathbf{f}_{c-3\varepsilon}) \to H_q(g_{c+2\varepsilon},\ g_{c-2\varepsilon})$, 于是, h 也是内射. 由此导出

$$
M_q(p_0,\ \mathbf{f}) \leqslant M_q(p_0,\ g) \quad q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.
$$

现在转向

定理 3.2 的证明　反证. 倘若 $(\theta,\ 0)$ 不是 $(3.12)_\mu$ 的分歧点, 则必存在 $(\theta,\ 0)$ 在 $\mathscr{X}_1\times\mathbb{R}^1$ 中的有界开邻域 $U\times(-\delta,\ \delta)$, 使得 J_μ, 当 $\mu\in(-\delta,\delta)$, 在 $u\in\overline{U}$ 上只有一个临界点 θ. 观察函数族 J_μ, 它们在 $\overline{U}$ 上显然满足 P.S. 条件, 并且 $\mu\mapsto J_\mu$ 在 C^1 模下连续. 此外, 当 $\mu<0$ 时, θ 是 J_μ 的局部极小点, 而当 $\mu>0$ 时, θ 是 J_μ 的局部极大点. 因此

$$
M_q(\theta,\ J_\mu)=\begin{cases}0, & q\neq 0,\\ 1, & q=0,\end{cases} \quad \text{当 } \mu<0,
$$

$$
M_q(\theta,\ J_\mu)=\begin{cases}0, & q\neq n,\\ 1, & q=n,\end{cases} \quad \text{当 } \mu>0.
$$

应用定理 3.3, $M_q(\theta,\ J_0)=0$, $\forall q$. 但由 Brouwer 度的同伦不变性以及定理 2.9,

$$\deg(J_0', U, \theta) = \deg(J_\mu', U, \theta) \quad 当\ |\mu|<\delta$$

$$= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q M_q(\theta, J_\mu) = 1 \quad \left(取\ \mu = -\frac{\delta}{2}\right).$$

然而,由定理 2.9,

$$\deg(J_0', U, \theta) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q M_q(\theta, J_0) = 0,$$

这是一个矛盾.

注 3.2 定理 3.3 是 Красносельский 的一个结果的改进,参看[Kr1].这里的证明方法是 M. Berger[BeM1]给出的.Böhme[Bö1],Marino[Ma1]曾用初等变分方法给出这个定理的不同的证明,参看 Rabinowitz[Ra9].

注 3.3 在定理 3.3 的假设下,结论还可以加强.事实上,下列三种情形必有一种发生:

(1) $(\theta, 0)$不是方程$(3.9)_0$的一个孤立解.

(2) 存在单边 0-邻域 Λ,使得当 $\mu\in\Lambda\setminus\{0\}$时,方程$(3.9)_\mu$至少有两个不同的非平凡解.

(3) 存在 0 的一个邻域 I,使得当 $\mu\in I\setminus\{0\}$时,方程$(3.9)_\mu$至少有一个非 0 解.

这个结果是 Rabinowitz[Ra9]用极小极大原理得到的.张恭庆[Ch9]用 Morse 理论给出了一个不同的、简化的证明.

对于定理 3.3 中的函数 $\mathbf{f}$,如果再假定它是偶的,那么在上述三种情形的分类中,结论还能加强,使得在 $\mu=0$ 的左、右邻域内具有多重分歧解,其总重数$\geqslant n$.参看 Fadell-Rabinowitz[FR2].

3.3 渐近线性方程

再假设 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间,设 A 是 $\mathscr{X}$ 上的一个有界线性自伴算子,按照它的谱分解把 $\mathscr{X}$ 分解为 $\mathscr{X}_+\oplus\mathscr{X}_-\oplus\mathscr{X}_0$,其中 $\mathscr{X}_+,\mathscr{X}_-,\mathscr{X}_0$ 分别对应着 A 的正、负、零谱的不变子空间,并用 P_+,P_-,P_0 分别表记到 $\mathscr{X}_+$,$\mathscr{X}_-$ 与 $\mathscr{X}_0$ 的正交投影.

作下列假设

(H_1) $A|\mathscr{X}_\pm$ 有有界逆.

(H_2) $r\triangleq\dim(\mathscr{X}_-\oplus\mathscr{X}_0)<\infty$.

(H_3) $g\in C^2(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$有有界的并是紧的导数 $g'(x)$. 此外, 当 $\mathscr{X}_0\neq\{\theta\}$时, 设

$$g(P_0x)\to-\infty \quad 当\ \|P_0x\|\to\infty.$$

我们来研究下列泛函的临界点的个数:

$$\mathbf{f}(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)+g(x). \tag{3.14}$$

定理 3.4 在假设(H_1), (H_2)与(H_3)之下, 若已知 $\mathbf{f}$ 有临界点$\{p_i\}_1^k$适合

$$\operatorname{ind}\mathbf{f}''(p_i)>\gamma \quad i=1,2,\cdots,k;$$

则 $\mathbf{f}$ 至少有 $k+1$ 个临界点.

证明 先验证 $\mathbf{f}$ 满足 P.S. 条件. 因其与第三章定理 4.1 第 1° 段的方法是一样的, 故省略.

2° 记 $\varepsilon_\pm=\inf\{\|Ax_\pm\|\,|\,\|x_\pm\|=1,\ x_\pm\in\mathscr{X}_\pm\}$, 则 $\varepsilon_\pm>0$. 记 $m=\sup\{\|g'(x)\|\,|\,x\in\mathscr{X}\}$, $R_+=\dfrac{1}{\varepsilon_+}(m+1)$, 以及 $\mathfrak{M}=(\mathscr{X}_+\cap B_{R_+})\oplus\mathscr{X}_-\oplus\mathscr{X}_0$. 由

$$\begin{aligned}(\mathbf{f}'(x),x_+)&=(Ax_+,x_+)-(g'(x),x_+)\\&\geqslant\varepsilon_+\|x_+\|^2-m\|x_+\|\end{aligned}$$

可见 $\mathbf{f}$ 在 $\mathfrak{M}$ 外没有临界点, 并且 $-\mathbf{f}'(x)$在 $\partial\mathfrak{M}$ 上每点指向 $\mathfrak{M}$ 的内部.

在 $\mathfrak{M}$ 上应用 Morse 理论. 首先注意

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\|A\|\|x_-\|^2-m(\|x_-\|+R_+)+g(P_0x)\\&\leqslant\mathbf{f}(x)\leqslant\frac{1}{2}\|A\|R_+^2\\&\qquad-\frac{1}{2}\varepsilon_-\|x_-\|^2+m(\|x_-\|+R_+)+g(P_0x),\end{aligned}$$

可见　　$\mathbf{f}(x)\to-\infty\Leftrightarrow\|x_-+P_0x\|\to\infty$　对 x_+ 一致

即 $\forall T>0$, $\exists\, a_1<a_2<-T$, $R_1>R_2>0$ 使得

$$(\mathscr{X}_+\cap B_{R_+})\oplus((\mathscr{X}_-\oplus\mathscr{X}_0)\setminus B_{R_1})\subset\mathbf{f}_{a_1}$$

$$\subset (\mathscr{X}_+ \cap B_{R_+}) \oplus (\mathscr{X}_- \oplus \mathscr{X}_0) \backslash B_{R_1}) \subset \mathbf{f}_{a_1}.$$

3° 倘若定理结论不对，即 $\mathbf{f}$ 只有 k 个临界点 $\{p_i\}_1^k$; 选择 $T>0$ 足够大，以致 $\{p_i\}_1^k \notin \mathbf{f}_{-T}$. 于是按第三章定理 1.2, 有强形变收缩 τ_1: $\mathbf{f}_{a_2} \to \mathbf{f}_{a_1}$.

还有一个强形变收缩 τ_2:

$$(\mathscr{X}_+ \cap B_{R_+}) \oplus ((\mathscr{X}_- \oplus \mathscr{X}_0) \backslash B_{R_1})$$
$$\to (\mathscr{X}_+ \cap B_{R_+}) \oplus ((\mathscr{X}_- \oplus \mathscr{X}_0) \backslash B_{R_1}),$$

定义如下：$\tau_2 = \eta(1, \cdot)$, 而

$$\eta(t; x) = \begin{cases} x, & \text{当 } \|x_- + P_0 x\| \geq R_1, \\ x_+ + \dfrac{x_- + P_0 x}{\|x_- + P_0 x\|}(tR_1 + (1-t)\|x_- + P_0 x\|), \\ & \text{当 } \|x_- + P_0 x\| \leq R_1, \end{cases}$$

$\forall (t, x) \in [0, 1] \times \mathfrak{M}$.

联合这两个强形变收缩，令 $\tau = \tau_2 \circ \tau_1$, 得到

$$\tau: \mathbf{f}_{a_2} \to (\mathscr{X}_+ \cap B_{R_+}) \oplus ((\mathscr{X}_- \oplus \mathscr{X}_0) \backslash B_{R_1}).$$

于是

$$\begin{aligned} H_q(\mathfrak{M}, \mathbf{f}_{a_2}) &\cong H_q(\mathfrak{M}, (\mathscr{X}_+ \cap B_{R_+}) \oplus ((\mathscr{X}_- \oplus \mathscr{X}_0) \backslash B_{R_1}) \\ &\cong H_q(\mathscr{X}_- \oplus \mathscr{X}_0, (\mathscr{X}_- \oplus \mathscr{X}_0) \backslash B_{R_1}) (\text{Künneth 公式}) \\ &\cong H_q((\mathscr{X}_- \oplus \mathscr{X}_0) \cap B_{R_1}, \partial((\mathscr{X}_- \oplus \mathscr{X}_0) \backslash B_{R_1})) (\text{切除}) \\ &\cong \begin{cases} Q, & q = \gamma, \\ 0, & q \neq \gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

4° $\forall \varepsilon > 0$, $\delta > 0$ 使 $B(p_i, 2\delta) \cap B(p_j, 2\delta) = \emptyset$ 当 $i \neq j$. 构造函数 $\tilde{\mathbf{f}}$ 使得

(1) $\tilde{\mathbf{f}}(x) = \mathbf{f}(x)$, 当 $\text{dist}(x, p_i) > 2\delta$, $i = 1, \cdots, k$;

(2) $|\tilde{\mathbf{f}}(x) - \mathbf{f}(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathscr{X}$;

(3) $\tilde{\mathbf{f}}$ 是非退化的，并满足 P.S. 条件;

(4) $\tilde{\mathbf{f}}$ 的临界集在 $\bigcup_{i=1}^k B(p_i, \delta)$ 内.

这样的函数定义如下：先取

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \delta, \\ 0, & t \geq 2\delta, \end{cases}$$

其中 $p\in C^{\infty}(\mathbb{R}^1_+)$，满足 $0\leqslant p(t)\leqslant 1$，$|p'(t)|\leqslant\frac{2}{\delta}$.

由 $\mathbf{f}$ 的 P.S. 条件

$$\beta=\inf\left\{\|\mathbf{f}'(x)\|\,\middle|\,x\in\bigcup_{i=1}^{k}B(p_i,2\delta)\backslash B(p_i,\delta)\right\}>0,$$

取 $a\in\mathscr{X}$ 适合

$$0<\|a\|<\min\left\{\frac{\beta}{6},\ \frac{\varepsilon}{M}\right\},\quad M=\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant k}\|p_i\|+2\delta \tag{3.15}$$

以及
$$\tilde{\mathbf{f}}^a(x)=\mathbf{f}(x)+\sum_{i=1}^{k}p(\|x-p_i\|)(a,x),$$

则(1)，(2)两条显然满足．又因为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}^{a\prime}(x)=\mathbf{f}'(x)&+\sum_{i=1}^{k}p(\|x-p_i\|)\cdot a\\&+\sum_{i=1}^{k}p'(\|x-p_i\|)(a,x)\frac{x-p_i}{\|x-p_i\|},\end{aligned}$$

所以当 $x\in\bigcup_{i=1}^{k}B(p_i,2\delta)\backslash B(p_i,\delta)$时，

$$\|\tilde{\mathbf{f}}^{a\prime}(x)\|\geqslant\beta-\|a\|-\frac{2}{\delta}\cdot\|a\|\cdot 2\delta\geqslant\frac{\beta}{6}>0. \tag{3.16}$$

(4)得证．至于 $\tilde{\mathbf{f}}^a$ 还满足 P.S. 条件，则是由 $\tilde{\mathbf{f}}$ 的 P.S. 条件以及(3.16)导出的．事实上，若$\{x_n\}$使 $\tilde{\mathbf{f}}^a(x_n)$有界，且 $\tilde{\mathbf{f}}^{a\prime}(x_n)\to\theta$，我们只需考察这串序列在某个 $B(p_i,\delta)$内就够了．这时

$$\tilde{\mathbf{f}}^{a\prime}(x)=\tilde{\mathbf{f}}'(x)+a=Ax+g'(x)+a.$$

容易验证这串 x_n 必有子列收敛．

现在选择适当的a，使得 $\tilde{\mathbf{f}}^a$ 是 Morse 函数．注意到 $\tilde{\mathbf{f}}^{a\prime}(x_0)=\theta$，必有 $\mathbf{f}'(x_0)=-a$．然而由 Sard-Smale 定理，对一个第二纲集上的 a 都对应着非退化的 x_0，即 $\mathbf{f}''(x_0)$有有界逆．又因为对于 $\tilde{\mathbf{f}}^a$ 的临界点 x_0，成立着 $\tilde{\mathbf{f}}^{a\prime\prime}(x_0)=\mathbf{f}''(x_0)$．所以对于一个第二纲集上的 a，只要满足(3.15)，这样的 $\tilde{\mathbf{f}}^a$ 即满足所要的一切条件，记作 $\tilde{\mathbf{f}}$.

5° 选择 $\varepsilon>0$ 足够小，以致 $\tilde{\mathbf{f}}_{-T}=\mathbf{f}_{-T}$．从而由第3°段的结果有

$$H_q(\mathfrak{M},\tilde{\mathbf{f}}_{a_1})\cong\begin{cases}Q, & q=\gamma,\\0, & q\neq\gamma.\end{cases}$$

选择 $\delta>0$ 足够小，以致

$$\operatorname{ind}\tilde{\mathbf{f}}''(x_0)>\gamma \quad \forall x_0,\ \tilde{\mathbf{f}} \text{ 的临界点.}$$

由此推出

$$C_q(x_0,\tilde{\mathbf{f}})\cong 0 \quad 0\leqslant q\leqslant\gamma,\ \forall x_0,\ \tilde{\mathbf{f}} \text{ 的临界点.}$$

现在对 $\tilde{\mathbf{f}}$ 在 $\tilde{\mathbf{f}}^{-1}[a_2,\ +\infty)$ 上应用 Morse 不等式，便导出矛盾. 因为第 γ 个 Morse 不等式的左边是 0，而右边是 1. 定理得证.

在一个特殊情形：$\mathscr{X}_0=\{\theta\}$ 时，定理 3.4 中关于 g' 的有界性假设可以去掉.

定理 3.5 设 $\mathbf{f}\in C^2(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$，又设存在有界自伴线性算子 A，A 有有界逆，并且 A 的极大负不变子空间 $\mathscr{X}_-$ 是有穷维的. 又设

$$g(x)=\mathbf{f}(x)-\frac{1}{2}(Ax,\ x)$$

有紧的导数 $g'(x)$，满足：

$$\|g'(x)\|=o(\|x\|) \quad \text{当 } \|x\|\to\infty.$$

如果已知 $\mathbf{f}$ 有临界点 $\{p_i\}_1^k$ 适合

$$\operatorname{ind}\mathbf{f}''(p_i)>\dim\mathscr{X}_- \quad i=1,\ \cdots,\ k,$$

则 $\mathbf{f}$ 至少有 $k+1$ 个临界点.

这个定理与定理 3.4 的仅有差别在于 g' 的有界性被去掉了，但 $\dim\mathscr{X}_0=0$. 我们需要

引理 3.1 假设定理 3.5 的条件都满足. 则必有正数 $R_1<R_2$ 和函数 $\rho\in C^\infty(\mathbb{R}_+^1,\ \mathbb{R}^1)$ 适合

$$\rho(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant R_1,\\ 0, & t>R_2,\end{cases} \tag{3.17}$$

使得

$$\hat{\mathbf{f}}(x)=\frac{1}{2}(Ax,\ x)+\rho(\|x\|)g(x), \tag{3.18}$$

满足

$$\|\hat{\mathbf{f}}'(x)\|\geqslant 1, \quad \forall x\in B_{R_2}\backslash B_{R_1}. \tag{3.19}$$

先承认这个引理，往证定理 3.5.

定理 3.5 的证明 注意到：取 R_1 足够大，

(1) $\tilde{\mathbf{f}}$ 与 $\mathbf{f}$ 有相同的临界集.

(2) $\tilde{\mathbf{f}}$ 与定理 3.4 中 $\mathbf{f}$ 的形式相同，除了 $\tilde{\mathbf{f}}'(x)-Ax$ 的紧性不被满足. 然而这算子的紧性只在验证 P. S. 条件时用到. 我们来直接验证 $\tilde{\mathbf{f}}$ 的 P. S. 条件，若有 $\{x_n\}_1^\infty\subset\mathscr{X}$，$\tilde{\mathbf{f}}(x_n)\to\theta$，则由 A^{-1} 的有界性，以及不等式(3.19)，推得 $\{x_n\}_1^\infty$ 除去有穷个点外包含在 B_{R_1} 内. 再由 g' 的紧性，立得 x_n 有收敛子列.

现在转向

引理 3.1 的证明 令 $\varepsilon=\frac{1}{5}\|A^{-1}\|^{-1}$，由假设 $\exists R_0>0$ 使得

$$\|g'(x)\|<\varepsilon\|x\| \quad 当 \|x\|>R_0.$$

再由假设，又有 $M_\varepsilon>0$ 使得

$$\|g'(x)\|<\varepsilon\|x\|+M_\varepsilon \quad \forall x\in\mathscr{X}.$$

应用中值不等式，得

$$|g(x)|<\varepsilon\|x\|^2+M_\varepsilon\|x\|+|g(\theta)|.$$

取

$$R_1>\max\left\{R_0,\ \frac{1}{\varepsilon}(4M_\varepsilon+3)\right\},$$

$$\lambda=\max\{1,\ |g(\theta)|\}R_1,$$

并令 $\varphi\in C^\infty(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1)$，$0\leqslant\varphi(t)\leqslant1$，满足：

$$\varphi(t)=\begin{cases}1, & t\leqslant0,\\ 0, & t\geqslant1,\end{cases}$$

以及 $\max_t|\varphi'(t)|\leqslant\frac{3}{2}$. 若取

$$\rho(t)=\varphi\left(\frac{t-R_1}{\lambda}\right)$$

以及 $R_2=R_1+\lambda$，则 $\rho(t)$ 满足(3.17)，并且

$$\begin{aligned}\|\mathbf{f}'(x)\|=&\left\|Ax+\frac{1}{\lambda}\varphi'\left(\frac{\|x\|-R_1}{\lambda}\right)g(x)\frac{x}{\|x\|}\right.\\&\left.+\varphi\left(\frac{\|x\|-R_1}{\lambda}\right)g'(x)\right\|\\\geqslant&\|A^{-1}\|^{-1}\|x\|-(\varepsilon\|x\|+M_\varepsilon)\\&-\frac{3}{2\lambda}(\varepsilon\|x\|^2+M_\varepsilon\|x\|+|g(\theta)|)\end{aligned}$$

$$\geqslant\left(5\varepsilon-\varepsilon-\frac{3}{2\lambda}\|x\|\right)\|x\|$$

$$-\left(M_\varepsilon+\frac{3}{2\lambda}\|x\|M_\varepsilon+\frac{3}{2\lambda}|g(\theta)|\right)$$

$$\geqslant\varepsilon\|x\|-(4M_\varepsilon+2)\geqslant 1,$$

当 $x\in B_{R_2}\backslash B_{R_1}$，这是因为 $\frac{1}{\lambda}\|x\|\leqslant 2$，从而(3.19)成立。

推论 3.1 设 $\mathbf{f}\in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^1)$. 存在可逆对称矩阵 A_∞，使得 $g(x)=\mathbf{f}(x)-\frac{1}{2}(A_\infty x,x)$ 满足

$$\|g'(x)\|=0(\|x\|)\quad 当\ \|x\|\to\infty.$$

又设 θ 是 $\mathbf{f}$ 的一个临界点，具有条件：

$$\operatorname{ind}(A_\infty)\notin[m_-^0,\ m_-^0+m_0^0],$$

其中 $m_-^0=\operatorname{ind}\mathbf{f}''(\theta)$，而 $m_0^0=\dim\ker\mathbf{f}''(\theta)$；则 $\mathbf{f}$ 至少还有一个非 θ 的临界点。

证明 当 $\operatorname{ind}(A_\infty)<m_-^0$ 时，这是定理 3.5 的直接推论. 当 $\operatorname{ind}(A_\infty)>m_-^0+m_0^0$ 时，因为

$$\operatorname{ind}(-A_\infty)=n-\operatorname{ind}(A_\infty)<n-(m_-^0+m_0^0)$$
$$=\operatorname{ind}(-\mathbf{f}''(\theta)),$$

对 $-\mathbf{f}$ 应用定理 3.5 即得结论.

注 3.4 推论 3.1 首先由 Amann Zehnder[AZ1]得到，用的证法是 Conley 指标理论[Con1]. 张恭庆[Ch5]在 $\mathscr{X}=\mathbb{R}^n$ 时将其推广到定理 3.5 的形式，证明依赖于带一般边界条件的 Morse 不等式. 随后，刘嘉荃[Liu1]推广到 $\mathscr{X}=\mathbb{R}^n$ 时的定理 3.4 的形式. 这里给出的定理 3.4, 3.5 是张恭庆[Ch8]中的结果.

3.4 一个极小极大定理

在§1 中，我们通过畴数，用上积长估计了泛函临界点的个数，现在我们要用卡积来直接作临界点个数的估计.

如果 X 是一个拓扑空间，G 是一个 Abel 群，σ 是 X 上的一个奇异 q-链，$\sigma=\sum g_i\sigma_i$，$g_i\in G$，σ_i 是奇异 q 单形，我们称 $\bigcup\operatorname{Im}\sigma_i$

为 σ 的支集，记它为 $|\sigma|$，同样，对于拓扑空间对 (X, Y) 上的奇异相对 q-链，也可以类似地定义支集.

设 M 是一个 C^2-Finsler 流形，$\mathbf{f}\in C^1(M, \mathbb{R}^1)$ 满足 P. S. 条件. 又设 $a<b$ 是它的正则值；并且 $[z]$ 是 $(\mathbf{f}_b, \mathbf{f}_a)$ 的一个非平凡同调类. 记

$$\mathscr{F}=\{|\tilde{\sigma}|\,|\,\tilde{\sigma}\in Z_*(\mathbf{f}_b;\ \mathbf{f}_a;\ G), \tilde{\sigma}\in[z]\},$$

$$\Phi^i=\{\eta:\mathscr{X}\to\mathscr{X}\ \text{同胚}\ |\eta\sim id\};$$

则 $\mathscr{F}$ 关于 Φ^i 是不变的，从而由极小极大原理，

$$c=\inf_{\tilde{\sigma}\in[z]}\sup_{x\in|\tilde{\sigma}|}\mathbf{f}(x)\quad(\text{第四章定理 1.5})$$

是 $\mathbf{f}$ 的临界值，满足 $c\in(a, b]$.

定义 3.1 设 (X, Y) 是一个拓扑空间对，两个非平凡的奇异相对同调类 $[z_1]$, $[z_2]\in H_*(\mathscr{X}, Y)$，若有如下联系：$\exists\omega\in H^*(X)$, $\dim\omega>0$ 使得

$$[z_1]=[z_2]\cap\omega,$$

则称 $[z_2]$ 优于 $[z_1]$，记作 $[z_1]<[z_2]$.

定理 3.6 设 $\mathbf{f}\in C^1(M, \mathbb{R}^1)$，满足 P. S. 条件，而 M 是一个 C^2-Finsler 流形. 又设 $a<b$ 是 $\mathbf{f}$ 的两个正则值，并且在 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]$ 上只有孤立临界点. 若有非平凡的 $[z_1]$, $[z_2]\in H_*(\mathbf{f}_b, \mathbf{f}_a)$，使得 $[z_1]<[z_2]$，则

$$c_i=\inf_{\tilde{z}_i\in[z_i]}\sup_{x\in|\tilde{z}_i|}\mathbf{f}(x)\quad i=1, 2$$

都是 $\mathbf{f}$ 的临界值，并满足 $a<c_1<c_2\leqslant b$.

证明 我们只要再证明 $c_1<c_2$ 就够了.

反证. 倘若 $c=c_1=c_2$，则 $\forall\varepsilon>0$，有 $\tilde{z}_2\in[z_2]$ 使得 $|\tilde{z}_2|\subset\mathbf{f}_{c+\varepsilon}$. 因为 K_c 仅由孤立临界点组成，所以可以选择 K_c 的两个可收缩的邻域 $N\subset N'$.

选择上链 $\tilde{\omega}\in\omega$，使其支集在 $\mathbf{f}_b\backslash N'$ 内. 因为 N' 是可收缩的，而 $\dim\omega>0$，所以这样的 $\tilde{\omega}$ 是可以找到的. 剖分 $\tilde{z}_2$ 使 $\tilde{z}_2=\tilde{z}_2'+\tilde{z}_2''$，其中 $|\tilde{z}_2'|\subset N'$ 而 $|\tilde{z}_2''|\subset\mathbf{f}_b\backslash N$. 令 $\tilde{z}_1=\tilde{z}_2\cap\tilde{\omega}=\tilde{z}_2''\cap\tilde{\omega}$，则

$$|\tilde{z}_1|\subset\mathbf{f}_{c+\varepsilon}\backslash N.$$

按第四章形变引理，存在同胚 $\eta: \mathbf{f}_{c+\varepsilon}\backslash N \to \mathbf{f}_{c-\varepsilon}$, $\eta \sim id$. 这蕴含了：$\eta|\tilde{z}_1| \subset \mathbf{f}_{c-\varepsilon}$. 但 $\eta(\tilde{z}_1) \in [z_1]$. 这与定义 $c_1 = c$ 矛盾.

推论 3.2 在定理 3.6 的假设下，若有 m 个非平凡的奇异相对同调类 $[z_1], \cdots, [z_m] \in H_*(\mathbf{f}_b, \mathbf{f}_a)$, 使得 $[z_1] < [z_2] < \cdots < [z_m]$; 则 $\mathbf{f}$ 至少有 m 个不同的临界点.

推论 3.3 设 $\mathbf{f} \in C^1(M, \mathbb{R}^1)$, 满足 P.S. 条件，是下方有界的，其中 M 是一个 C^2 Finsler 流形；则 $\mathbf{f}$ 至少有 cuplength(M) $+1$ 个不同的临界值.

证明 由上积长的定义，$\exists\ \omega_1, \cdots, \omega_m \in H^*(M)$, $\dim \omega_i > 0$, $i=1, \cdots, m$, 使得 $\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_m \neq 0$, 这里 $m = \text{cuplength}(M)$. 于是有 $[z_1] \in H_*(M)$, 使得

$$[[z_1], \omega_1 \cup \cdots \cup \omega_m] \neq 0.$$

令
$$[z_{i+1}] = [z_i] \cap \omega_i, \quad i=1, \cdots, m,$$

便得到 $m+1$ 个非平凡的奇异同调类 $[z_{m+1}] < [z_m] < \cdots < [z_1]$. 取 $a = \inf\{\mathbf{f}(x) | x \in M\}$, 而 b 足够大，以致 $[z_1], \cdots, [z_{m+1}]$ 在 $\mathbf{f}_b$ 内是非平凡的，并不妨假设 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{f}^{-1}[a, b]$ 上只有孤立的临界点. 于是由推论 3.2 立得结论.

注 3.5 比较推论 3.3 与定理 1.1 以及第四章定理 1.4, 可见推论 3.3 可以看成是 Люстерник-Шнирельман 重数定理的另一种形式.

§4 对微分方程的应用

现在我们要把 §3 中的几个临界点定理应用到具体的微分方程中去.

4.1 三解定理的应用

例 1 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界的、边界光滑的开区域. 考察下列方程：

$$\begin{cases}-\Delta u=g(u) & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases} \tag{4.1}$$

其中 g 满足:

(1) $g\in C^1(\mathbb{R}^1)$, $g(0)=0$;

(2) $|g'(t)|\leqslant c_1+c_2|t|^{\alpha-1}$, $\alpha<\frac{n+2}{n-2}$ 当 $n\geqslant 3$;

(3) $G(t)\triangleq\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\leqslant\alpha_0 u^2+\beta$, $2\alpha_0<\lambda_1$, B 是常数;

(4) 设 $\sigma(-\Delta)=\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m,\ \cdots\}$, $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$, 存在 $m\geqslant 1$ 使得: $\lambda_m<g'(0)<\lambda_{m+1}$.

定理 4.1 在假设(1)～(4)之下,方程(4.1)至少有三个不同的解.

证明 取 $\mathscr{X}=H_0^1(\Omega)$ 以及

$$J(u)=\int\frac{(\nabla u)^2}{2}-G(u),$$

则(1)与(2)蕴含了 $J\in C^2(\mathscr{X},\mathbb{R}^1)$, (3)蕴含 J 下方有界:

$$J(u)\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{2\alpha_0}{\lambda_1}\right)\int_\Omega(\nabla u)^2-\beta\,\mathrm{mes}(\Omega), \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}(J''(\theta)u,\ v)&=\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla v-g'(0)u\cdot v)\\ &=((id-Kg'(0))u,\ v),\end{aligned}$$

其中 $K=(-\Delta)^{-1}$, 从而 θ 是 J 的一个非局部极小的, 非退化的, 具有穷 Morse 指数的临界点.

剩下只需验证 $P.S.$ 条件. 因为有(4.2),所以由 $J(u_n)$ 有界,可以推出 $\{u_n\}H_0^1$-有界,从而有弱收敛子列 u_{n_i}. 注意到

$$J'(u)=u-K\circ g(u(x)),$$

而 $K\circ g$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的全连续算子. 即得 u_{n_i} 强收敛. 至此, 应用定理 3.1 立得结论.

注 4.1 三解定理(定理 3.1),还曾被应用到许多其它类型的问题上去. 参看张恭庆[Ch5], Castro Lazer[CL1] 以及张恭庆、吴绍平、李树杰[CWL1]. 前二篇是对 Hamilton 组周期解以及其它非线性形式的椭圆边值问题的应用, 而后一篇则将这定理应

用到渐近线性波方程的多重周期解问题. 对于 Banach 空间上的三解定理在拟线性椭圆边值问题中的应用, 请看张恭庆[Ch6].

4.2 鞍点约化与渐近线性算子方程

设 $\mathscr{X}$ 是一个 Hilbert 空间, L 是一个 $\mathscr{X}$ 上的(无界)自伴算子, 而 F 是 $\mathscr{X}$ 上的一个位算子, 即 $\exists\ \Phi\in C^1(\mathscr{X}, \mathbb{R}^1)$ 使得 $\Phi'=F$. 作下列假设:

(A) $\exists$ 实数 $\alpha, \beta\notin\sigma(L)$, 使得 $\sigma(L)\cap[\alpha, \beta]$ 只含有有穷多个有穷重本征值, 其中 $\sigma(L)$ 是 L 的谱集.

(F) $F\in C(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ 满足:

$$\begin{aligned}\alpha\|u-v\|^2\leqslant(F(u)-F(v), u-v)\\ \leqslant\beta\|u-v\|^2\quad\forall u, v\in\mathscr{X}.\end{aligned}$$

设 $\{E_\lambda\}$ 是 A 的谱分解, 令

$$P^+=\int_\beta^\infty\mathrm{d}E_\lambda,\quad P^-=\int_{-\infty}^\alpha\mathrm{d}E_\lambda,\quad P^0=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}E_\lambda,$$

$$\mathscr{X}^\pm=P^\pm(\mathscr{X}),\quad \mathscr{X}^0=P^0(\mathscr{X}).$$

以及 $$R=\int_{-\infty}^\alpha(\alpha-\lambda)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}E_\lambda,\quad S=\int_\beta^\infty(\lambda-\alpha)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}E_\lambda,$$

$$T=\int_\alpha^\beta(\lambda-\alpha)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}E_\lambda.$$

那么求解方程

$$Lu=F(u) \tag{4.3}$$

的问题便化归为求下列泛函的临界点问题:

$$\begin{aligned}f(u_+, u_-, u_0)=&-\frac{1}{2}(\|u_+\|^2+\|u_0\|^2-\|u_-\|^2)\\ &+\Phi_0(Ru_-+Su_++Tu_0),\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中 $(u_+, u_-, u_0)\in\mathscr{X}^+\oplus\mathscr{X}^-\oplus\mathscr{X}^0=\mathscr{X}$, 而

$$\Phi_0(u)=\Phi(u)-\frac{\alpha}{2}\|u\|^2.$$

事实上, 若 (u_+^*, u_-^*, u_0^*) 是(4.4)的临界点, 则

$$u=Ru_-^*+Su_+^*+Tu_0^*$$

便是(4.3)的解.

固定 u_0，$\mathbf{f}$ 是 (u_+, u_-) 的一个凸-凹函数，应用 Amann 的鞍点约化方法（参看 Amann[Am1]），我们可以把求 $\mathscr{X}$ 上泛函 $\mathbf{f}$ 的临界点问题化归为求 $\mathscr{X}^0$ 上泛函

$$g(u_0)=\mathbf{f}(u_+(u_0),\ u_-(u_0),\ u_0)$$

的临界点问题，其中 $(u_+(u_0),\ u_-(u_0))$ 是当 $u_0\in\mathscr{X}^0$ 固定时，凸-凹泛函 $\mathbf{f}(u_+,\ u_-,\ u_0)$ 的鞍点，即

$$\mathbf{f}(u_+,\ u_-(u_0),\ u_0)\leqslant g(u_0)\leqslant\mathbf{f}(u_+(u_0),\ u_-,\ u_0),$$

$\forall(u_+, u_-, u_0)\in\mathscr{X}^+\oplus\mathscr{X}^-\oplus\mathscr{X}^0$.

令 $z=Tu_0, Z=T\mathscr{X}^0$，以及

$$v(z)=Ru_-(T^{-1}z)+Su_+(T^{-1}z),$$

$$u(z)=z+v(z);$$

于是问题(4.4)又等价于寻求泛函

$$a(z)=-g\circ T^{-1}(z)=\frac{1}{2}(Lu(z),\ u(z))-\Phi(u(z))$$

的临界点问题. 直接计算，我们有：

$$a'(z)=Lu(z)-F(u(z)). \tag{4.5}$$

为了应用 Morse 理论，我们应要求 $a\in C^2(\mathscr{X}^0, \mathbb{R}^1)$，于是还需要进一步的假设：

(R) (i) 存在对称有界算子 $F'(x)$，它是 $F(x)$ 的 Gateaux 导数；

(ii) E 是一个实 Banach 空间，使得

$$Z\to E\to\mathscr{X}$$

的内射是连续的，并且

$$F'|_E\in C(E, \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})).$$

(iii) $P^{\pm}v\in C(Z, E)$.

在这假设下，Amann-Zehnder 证明了 $a\in C^2(Z, \mathbb{R}^1)$，并且

$$a''(z)=[L-F'(u(z))]u'(z). \tag{4.6}$$

此外，$u(z)$，$v(z)$ 以及 $u_\pm(z)$ 都是 C^1 函数.

因 Amann-Zehnder 的证明很繁琐. 计算比较长，而且又是技术性的，故略去. 有兴趣的读者请直接去看 Amann-Zehnder

[AZ1].

引理 4.1 在假设(A), (F), (R)之下, 又设有有界自伴算子 F_∞ 使得

(F_∞) (i) $P^0F_\infty = F_\infty P^0$,

(ii) $\|F(u) - F_\infty u\| = o(\|u\|)$ 当 $\|u\|\to\infty$,

(iii) $0 \notin \sigma(L - F_\infty)$;

则

(1) $v(z) = o(\|z\|)$ 当 $\|z\|\to\infty$,

(2) 函数 $a(z) = \dfrac{1}{2}(Lu(z), u(z)) - \Phi(u(z))$ 是渐近二次的, 以 $L - F_\infty|_Z$ 为其渐近矩阵, 即

$$\|a'(z) - (L - F_\infty)z\| = o(\|z\|) \quad 当\ \|z\|\to\infty.$$

证明 由直接计算可得

$$Lv(z) = (I - P^0)F(u(z)). \tag{4.7}$$

因为 P^0 与 F_∞ 交换, 所以

$$(L - F_\infty)v(z) = (I - P^0)[F(u(z)) - F_\infty u(z)].$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$, 使得

$$\begin{aligned}\|v(z)\| &\leqslant \|(L - F_\infty)^{-1}\|\|F(u(z)) - F_\infty u(z)\| \\ &< \varepsilon C(\|z\| + \|v(z)\|) \quad 当\ \|z\| > R,\end{aligned}$$

其中 $C = \|(L - F_\infty)^{-1}\|$, 即得

$$\|v(z)\| = o(\|z\|) \quad 当\ \|z\|\to\infty.$$

再看(4.5)与(4.7),

$$\begin{aligned}\|a'(z) - (L - F_\infty)z\| &= \|Lz - P^0F(u(z)) - (L - F_\infty)z\| \\ &\leqslant \|F(u(z)) - F_\infty u(z)\| \\ &= o(\|u(z)\|) \\ &= o(\|z\|). \quad 当\ \|z\|\to\infty.\end{aligned}$$

引理 4.2 在(A), (F)与(R)的假设下, 设 $F(\theta) = \theta$.

(1) 若有 $C_0^- \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ 自伴, 它与 P^0, P^- 都交换, 并且

$$\min(\sigma(L) \cap [\alpha, \beta]) \leqslant C_0^- \leqslant F'(\theta),$$

则 $$a(z) \leqslant \frac{1}{2}((L-C_0^-)z, z)+o(\|z\|^2), \quad 当\ z\to\theta\ 于\ Z.$$

(2) 若有 $C_0^+ \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})$ 自伴，它与 P^0, P^+ 都交换，满足：

$$F'(\theta) \leqslant C_0^+ \leqslant \max(\sigma(L)\cap[\alpha,\beta]),$$

则 $$a(z) \geqslant \frac{1}{2}((L-C_0^+)z, z)+o(\|z\|^2), \quad 当\ z\to\theta\ 于\ Z.$$

证明 由定义及鞍点性质：

$$\begin{aligned} a(z) &= -g\circ T^{-1}(z) \\ &\leqslant -\mathbf{f}(0, P^-v(z), T_z^{-1}) \quad \forall z\in Z \\ &= \frac{1}{2}(L(P^-v(z)+z), (P^-v(z)+z)) \\ &\quad -\Phi(P^-v(z)+z)). \end{aligned}$$

由设 $F(\theta)=\theta$, 不妨再设 $\Phi(\theta)=0$, 利用分部积分公式：

$$\Phi(q)=\frac{1}{2}(F'(\theta)q\cdot q)+\int_0^1(F(tq)-F'(\theta)tq, q)\mathrm{d}t,$$

再由中值定理，

$$\left|\Phi(q)-\frac{1}{2}(F'(\theta)q, q)\right| \leqslant \frac{1}{2}\sup_{0<t<1}\|F'(tq)-F'(\theta)\|\|q\|^2$$

$\forall q\in\mathscr{X}$. 令 $q=P^-v(z)+z$, 由假设(R)以及 $v(\theta)=0$ 推出

$$\begin{aligned} -\Phi(P^-v(z)+z) \leqslant -\frac{1}{2}(F'(\theta)(P^-v(z)+z), P^-v(z)+z) \\ +o(1)\|P^-v(z)+z\|^2. \end{aligned}$$

当 $z\to\theta$. 这是因为 $v\in C^1(Z, \mathscr{X}^+\oplus\mathscr{X}^-)$, 所以

$$\|v(z)\|=O(\|z\|) \quad 当\ \|z\|\to 0.$$

进而得到

$$\begin{aligned} a(z) &\leqslant \frac{1}{2}((L-F'(\theta))q, q)+o(\|z\|^2) \\ &\leqslant \frac{1}{2}((L-C_0^-)q, q)+o(\|z\|^2) \\ &= \frac{1}{2}((L-C_0^-)P^-v(z), P^-v(z)) \\ &\quad +\frac{1}{2}((L-C_0^-)z, z)+o(\|z\|^2), \end{aligned}$$

当 $z\to\theta$. 取 $$\alpha_-=\mathrm{Min}\{\sigma(L)\cap[\alpha,\beta]\},$$
则 $$\alpha_-I\leqslant C_0^-,$$
从而有
$$((L-C_0^-)P^-v(z),\ P^-v(z))\leqslant((L-\alpha_-I)P^-v,\ P^-v)\leqslant 0.$$
即得 $$a(z)\leqslant\frac{1}{2}((L-C_0^-)z,\ z)+o(\|z\|^2)\quad 当\ z\to\theta.$$
同理证明第(2)个结论.

对于任意对称矩阵 B, 我们用 $m^\pm(B)$ 表记它的正/负定不变子空间的维数.

定理 4.2 在假设(A), (F), (R)与(F_∞)之下, 又设 $F(\theta)=\theta$, 以及下列(a)或(b)二者之一:

(a) $\exists\ C_0^-$ 有界自伴, 与 P^0, P^- 都交换, 满足:
$$\min\{\sigma(L)\cap[\alpha,\beta]\}\leqslant C_0^-\leqslant F'(\theta),$$
以及 $$m^-(L-C_0^-|_Z)>m^-(L-F_\infty|_Z);$$

(b) $\exists\ C_0^+$ 有界自伴, 与 P^0, P^+ 都交换, 满足:
$$F'(\theta)\leqslant C_0^+\leqslant\max\{\sigma(L)\cap[\alpha,\beta]\}$$
以及 $$m^+(L-C_0^+|_Z)>m^+(L-F_\infty|_Z);$$
则方程(4.3)至少有一个非 0 解.

证明 我们已经把这问题化归为有穷维空间 Z 上函数 $a(z)$ 的非 θ 临界点的存在性问题了. 并且已知 $a\in C^2(Z,\mathbb{R}^1)$, 它是渐近二次的, 以 $L-F_\infty|_Z$ 为渐近矩阵. 此外还知道: $L-F_\infty|_Z$ 有逆.

由引理 4.2, 条件(a)表明: 在 Z 的一个 $m^-(L-C_0^-|_Z)$ 维子空间 Z_- 上, $a''(\theta)$ 是负定的. 从而
$$m^-(a''(\theta))\geqslant m^-(L-C_0^-|_Z)>m^-(L-F_\infty|_Z).$$
同理, 条件(b)表明: 在 Z 的一个 $m^+(L-C_0^+|_Z)$ 维子空间 Z_+ 上, $a''(\theta)$ 是正定的, 从而
$$m^+(a''(\theta))\geqslant m^+(L-C_0^+|_Z)>m^+(L-F_\infty|_Z).$$
这时,
$$\begin{aligned}m^-(L-F_\infty|_Z)&=\dim Z-m^+(L-F_\infty|_Z)\\&>\dim Z-m^+(a''(\theta))\\&=m^-(a''(\theta))+\dim\ker a''(\theta),\end{aligned}$$

联合这两种情形(a)或(b)，得到

$$m^-(L-F_\infty|_Z)\notin[m^-(a''(\theta)),\ m^-(a''(\theta))+\dim\ker a''(\theta)],$$

应用定理3.5的推论3.1即得结论.

4.3 渐近线性椭圆边值问题

例2 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有界开集，具有足够光滑的边界 $\partial\Omega$. 又设 $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 是 C^1 函数，满足条件：

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant C. \tag{4.8}$$

假定存在 $\lambda_\infty\notin\sigma(-\Delta)$ 使得

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{f(x,t)}{t}=\lambda_\infty\quad 对\ x\in\Omega\ 一致. \tag{4.9}$$

我们要研究方程：

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,u(x)) & x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0.\end{cases} \tag{4.10}$$

为此取 $\mathscr{X}=L^2(\Omega)$; $L=-\Delta$, $D(L)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$; F: $u\mapsto f(x,u(x))$.

关于条件(A). 因为 $-\Delta$ 是自伴的，只具有点谱，而且每个本征值都只有有穷重. 所以只要实数 α, $\beta\notin\sigma(L)$ 且 $\alpha<\beta$, $\sigma(L)\cap[\alpha,\beta]$ 就只含有有穷多个有穷重的本征值.

关于条件(F). 由假设(4.8),

$$|f(x,t)|\leqslant|f(x,0)|+C|t|,$$

所以 F: $L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 是连续的，若令

$$\phi(x,\xi)=\int_0^\xi f(x,t)\mathrm{d}t$$

以及

$$\Phi(u(x))=\int_\Omega\phi(x,u(x))\mathrm{d}x,$$

按第一章§5.3的例，Φ 是 H 上的连续可微泛函，而且 $\Phi'=F$.

现在取 $\alpha<-C$, $\beta>C$, 使得 α $\beta\notin\sigma(A)$. 显然可见：$\forall u$, $v\in L^2(\Omega)$,

$$\alpha\|u-v\|^2\leqslant\int_\Omega \underset{(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^1}{\mathrm{Min}}\left[\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ t)\right](u(x)-v(x))^2$$

$$\leqslant\int_\Omega[f(x,\ u(x))-f(x,\ v(x))](u(x)-v(x))$$

$$\leqslant\int \underset{(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}^1}{\mathrm{Max}}\left[\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ t)\right](u(x)-v(x))^2$$

$$\leqslant\beta\|u-v\|^2.$$

关于条件(R) 直接计算，可见 F 有 Gateaux 导数，它是一个乘法算子：

$$F'(u)v=\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ u(x))\cdot v(x).$$

还是利用假设(4.8)，$F'(u)$成为 $L^2(\Omega)$上的有界自伴算子。

取 Banach 空间 $E=C(\bar{\Omega})$. 因为 Z 是 $-\Delta$ 的在区间$[\alpha,\ \beta]$内的有穷个本征值对应的本征函数张成的有穷维空间，而这些本征函数又都是 $\bar{\Omega}$ 上的光滑函数，所以显然有下列内射的连续性：

$$Z\to E\to\mathscr{X}.$$

还有 $\forall u_1,\ u_2\in C(\bar{\Omega})$,

$$\|F'(u_1)-F'(u_2)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})}$$

$$\leqslant\left\|\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ u_1(x))-\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ u_2(x))\right\|_{L^\infty(\Omega)};$$

所以 $F'|_E\in C(E,\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X}))$.

再证 $P^\pm v\in C(Z,\ E)$. 事先我们已经知道 $v\in C(Z,\ \mathscr{X})$, 并且 $P^\pm v$ 满足下列方程：

$$LP^\pm v(z)=P^\pm F(u(z)),$$

利用 $L=-\Delta$ 的 L^p 估计，$1<p<\infty$,

$$\|P^\pm v(z)-P^\pm v(z_0)\|_{W_p^2}\leqslant C_p\|P^\pm(F(u(z))-F(u(z_0))\|_{L^p}$$

$\forall z,\ z_0\in Z$, 其中 C_p 是一个常数. 如今 P^0, P^- 都是有穷维算子，从而 P^+ 是 L^p 到自身的有界算子，于是有常数 C'_p, C''_p 等，使得

$$\|P^+v(z)-P^+v(z_0)\|_{W_p^2}$$

$$\leqslant C'_p\|F(u(z))-F(u(z_0))\|_{L^p}\leqslant C''_p\|u(z)-u(z_0)\|_{L^p}$$

$$\leqslant C''_p(\|P^+v(z)-P^+v(z_0)\|_{L^p}+\|z-z_0\|$$

$$+\|P^-v(z)-P^-v(z_0)\|),$$

$\forall z,\ z_0\in Z$.

从 $p=2$ 出发，迭代有穷步，可以达到

$$\|P^{\pm}v(z)-P^{\pm}v(z_0)\|_{C(\bar{\Omega})}$$
$$\leqslant M(\|v(z)-v(z_0)\|_{L^2(\Omega)}+\|z-z_0\|_Z),$$

$\forall z,\ z_0\in Z$，其中 M 是一个常数.

这就验证了条件(R).

最后验证条件(F_∞). 现在取 $F_\infty=\lambda_\infty I$. 只需验证：$\|F(u)-\lambda_\infty u\|=o(\|u\|)$ 当 $\|u\|\to\infty$. 事实上，由假设(4.9)，$\forall\varepsilon>0$，$\exists C_\varepsilon$ 使得

$$|f(x,\ t)-\lambda_\infty t|\leqslant\varepsilon|t|+C_\varepsilon,$$

从而 $\|f(x,\ u(x))-\lambda_\infty u(x)\|_{L^2}\leqslant\varepsilon\|u\|_{L^2}+C_\varepsilon\,\mathrm{mes}(\Omega)^{\frac{1}{2}}$,

取 $N>\frac{1}{\varepsilon}C_\varepsilon\,\mathrm{mes}\,(\Omega)^{\frac{1}{2}}$，则当 $\|u\|_{L^2}>N$ 时，

$$\|F(u)-\lambda_\infty u\|_{L^2}<2\varepsilon\|u\|_{L^2}.$$

至此我们直接应用定理 4.2 就得到

定理 4.3 设 f 满足(4.8)，(4.9)以及 $f(x,\ 0)\equiv0$，又设 $\exists\bar{\lambda}_0\in\sigma(\Delta)$ 以及 $\varepsilon>0$ 使得

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,\ 0)\leqslant\bar{\lambda}_0-\varepsilon<\bar{\lambda}_0<\lambda_\infty \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial t}f(x,\ 0)\geqslant\bar{\lambda}_0+\varepsilon>\bar{\lambda}_0>\lambda_\infty, \tag{4.11}$$

则方程(4.10)至少有一个非零解.

注 4.2 定理 4.2 还可以应用于渐近线性波方程和渐近二次 Hamilton 组的周期解问题，得到类似于定理 4.3 的结果，详见 Amann-Zehnder[AZ1].

注 4.3 在定理 4.3 中，我们假设(4.9)中的 $\lambda_\infty\notin\sigma(-\Delta)$. 然而当 $\lambda_\infty\in\sigma(-\Delta)$ 时，只要再添加上第三章定理 4.1 中的 Landesman-Lazer 型条件，也能得到非平凡解(应用定理 3.4 参看张恭庆[Ch8]).

4.4 Arnold 猜测

I.V. Arnold 曾猜测：环面 T^2 上的每个"同调"于恒同映射的

辛微分同胚至少有三个几何上不同的不动点(参看[Ar1], [Ar2]).

用坐标表示，设 ψ: $T^2\to T^2$ 是一个微分同胚. $\psi(x, y)=(x+f(x, y), y+g(x, y))$, $(x, y)\in T^2$, f, g 都是二元周期的, 称其为辛映射, 是指 Jacobi 行列式 $\det\left(I+\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}\right)=1$. 称其"同调"于恒同映射, 是指 $\int_{T^2} f=\int_{T^2} g=0$.

这个问题可以等价地化归为寻求下列 Hamilton 组的周期解的个数问题(参看 Conley-Zehnder[CZ2]):

$$\dot{z}=JH_z(t, z), \tag{4.12}$$

其中 $H\in C^2(S^1\times T^2)$, 或者说, $H\in C^2[0, 2\pi]\times\mathbb{R}^2)$, 但对变量 t; x, y 都是 2π 周期的.

在这一段, 我们要证明:

定理 4.4 设 $H\in C^2([0, 2\pi]\times\mathbb{R}^{2n})$ 关于每个变量都是 2π-周期的, 则 Hamilton 组

$$\dot{z}=JH_z'(t, z) \tag{4.13}$$

至少有 $2n+1$ 个不同的 2π-周期解. 又若已知(4.13)的所有 2π-周期解都是非退化的, 则(4.13)至少有 2^{2n} 个不同的 2π-周期解.

在这里一个 2π-周期解称为是非退化的. 是指它没有等于 1 的 Floquet 乘子.

为了证明定理 4.4, 我们把方程(4.13)看成 § 4.2 中的算子方程, 采用鞍点约化方法化归为有穷维问题. 取 $\mathscr{X}=L^2(S^1, \mathbb{R}^{2n})$, $L=-J\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $D(L)=H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$, 这里的符号参看第一章 § 6.3, 以及 F: $z\mapsto H_z'(t, z(t))$. 显然有 $F=\Phi'$,

$$\Phi(z)=\int_0^{2\pi} H(t, z(t))\mathrm{d}t.$$

按第一章 § 6.3, L 满足条件(A), 其中 α, β 为任意非整数. 又因为 H 关于每个变量都是 2π 周期的, 所以 $\|H_{zz}''(t, z)\|$ 是有界的. 设为 $C>0$ 所控制. 则有

$$|(H'_z(t, u)-H'_z(t, v), u-v)|\leqslant C\|u-v\|^2 \quad \forall u, v\in\mathscr{X}.$$

因此，不妨设 $C>0$ 不是整数，$\alpha=-C$，$\beta=C$，条件(F)也被满足.

至于条件(R)，通过直接计算，可见 F 有 Gateaux 导数，它是一个矩阵函数乘法算子：

$$F'(z)w=H''_{zz}(t, z(t))\cdot w(t),$$

并且 $F'(z)$ 是 $\mathscr{X}$ 上的有界自伴算子.

再取 $E=C([0, 2\pi], \mathbb{R}^{2n})$，$Z=\bigoplus_{|j|\leqslant C} M(j)$，其中 $M(j)$ 是对应于本征值 j 的 L 的本征子空间(它是 $2n$ 维的，见第一章 § 6.3). 显然有连续嵌入：

$$Z\to E\to\mathscr{X}.$$

由设 $H\in C^2$，可得 $F'|_E$: $E\to\mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$ 是连续的. 这是因为

$$\|H''_{zz}(t, u)-H''_{zz}(t, v)\|_{\mathscr{L}(L^2,L^2)}$$
$$\leqslant\sup_{t\in[0,2\pi]}\|H''_{zz}(t, u(t))-H''_{zz}(t, v(t))\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}^{2n})}.$$

还要证明：$P^{\pm}v\in C(Z, E)$. 因为由约化过程已知 $v\in C(Z,\mathscr{X})$，我们只要再利用方程

$$LP^{\pm}v(z)=P^{\pm}F'(u(z)),$$

它等价于

$$(\lambda I-L)P^{\pm}v(z)=P^{\pm}[\lambda v(z)-F'(u(z))] \quad \lambda\notin\mathbf{Z},$$

亦即 $$P^{\pm}v(z)=(\lambda I-L)^{-1}P^{\pm}[\lambda v(z)-F'(u(z))],$$

则由 $(\lambda I-L)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X}, E)$ (第一章 § 6.3)，就可以证得 $P^{\pm}v\in C(Z, E)$.

由条件(A)，(F)及(R)，我们把求解方程(4.13)化归为求有穷维空间 Z 上的 C^2 函数 $a(z)$ 的临界点：

$$a(z)=\frac{1}{2}(Lu(z), u(z))-\int_0^{2\pi} H(t, u(z)).$$

再分解空间 $Z=H_+\oplus H_0\oplus H_-$，其中

$$H_+=\bigoplus_{C>j>0} M(j), \quad H_-=\bigoplus_{-C<j<0} M(j), \quad H_0=M(0).$$

注意到 $v(z)$ 是满足方程(4.7)的唯一解(由压缩映象定理)，记 $z=z_++z_-+z_0$，其中 $z_\pm\in H_\pm$，$z_0\in H_0$，而 F 关于 z_0 是 2π-周期的，从而 $v(z)$ 关于 z_0 也是 2π 周期的. 由此推出 $a(z)$ 关于 z_0 是 2π 周期

的.

现在，我们可以把 $a(z)$ 看成是流形 $(H_+\oplus H_-)\times T^{2n}$ 上的函数，$z=(z_+, z_-, z_0)\in H_+\times H_-\times T^{2n}$.

注意到：

(1) $Lz_0=0$,

(2) $\|v(z)\|$ 是有界的(由(4.7))；

记 $\xi=(z_+, z_-)$，以及

$$g(\xi, z_0)=\frac{1}{2}(Lv(z), v(z))-\int_0^{2\pi}H(t, z+v(z)),$$

则
$$dg(\xi, z_0)=-P^0H'_z(t, z+v(z)),$$

这里 P^0 是到 Z 的正交投影. 因此 dg 是 $Z\to Z$ 的连续有界映射，从而是紧映射. 于是

$$a(\xi, z_0)=\frac{1}{2}(L\xi, \xi)+g(\xi, z_0)$$

满足 P.S. 条件(类似于定理 3.4). 此外，

为了 (ξ^*, z_0^*) 是 a 的临界点，必须且仅须：

$$\begin{cases}Lz_\pm^*+g'_{z_\pm}(z_+^*+z_-^*, z_0^*)=\theta,\\ g'_{z_0}(z_+^*+z_-^*, z_0^*)=\theta.\end{cases}$$

由于 g'_z 是有界的，便有 $R_+>0$，使得 a 在 $\mathfrak{M}\triangleq(H_+\cap B_{R_+})\times H_-\times T^{2n}$ 外没有临界点，并且 $-da$ 在 $\partial\mathfrak{M}$ 上指向 $\mathfrak{M}$ 的内部. 此外

$$\begin{cases}a(z)\to-\infty\Leftrightarrow\|z_-\|\to\infty,\\ \text{当 } z\in\mathfrak{M}.\end{cases}$$

应用 §3.3, 定理 3.4 证明中第 2°, 3° 两段的推理，可见，存在 $T>0$ 足够大以及 $R_->0$，使得

a_{-T} 是 $(H_+\cap B_R)\times(H_-\backslash B_{R_-})\times T^{2n}$ 的形变收缩. 从而

$$\begin{aligned}H_q(\mathfrak{M}, a_{-T})&\cong H_q(\mathfrak{M}, (H_+\cap B_{R_+})\times(H_-\backslash B_{R_-})\times T^{2n})\\ &\cong H_q(H_-\times T^{2n}, (H_-\backslash B_{R_-})\times T^{2n})\quad\text{(Künneth)}\\ &\cong H_q((H_-\cap B_{R_-})\times T^{2n}, \partial(H_-\cap B_{R_-})\times T^{2n})\text{(切除)}\\ &\cong H_{q-r}(T^{2n})\quad\text{(Künneth)},\end{aligned}\tag{4.14}$$

其中 $r=\dim H_-$. 同理因 $(H_+\cap B_{R_+})\times H_-$ 是可收缩的，

$$H^q(\mathfrak{M}) \cong H^q(T^{2n}).$$

于是按卡积

$$\cap: H_{q+r}(\mathfrak{M}, a_{-T}) \times H^1(\mathfrak{M}) \to H_{q+r-1}(\mathfrak{M}, a_{-T})$$

$q=2n, \cdots, 0$, 我们可以构造出 $2n+1$ 个非平凡的有序的奇异相对同调类 $[z_{2n+1}] < [z_{2n}] < \cdots < [z_1]$. 事实上, 取 $[z_1]$ 为 $H_{2n+r}(\mathfrak{M}, a_{-T})$ 中的生成元, 取 $\omega_1, \cdots, \omega_{2n} \in H^1(\mathfrak{M})$, 为其生成元, 并令

$$[z_{i+1}] = [z_i] \cap \omega_i \quad i=1, 2, \cdots, 2n.$$

即为所求.

应用推论 3.2, 我们得到 a 的至少 $2n+1$ 个不同的临界点.

如果 a 还是一个 Morse 函数, 那么由 Morse 不等式, a 至少有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i(\mathfrak{M}, a_{-T})$$

个临界点, 其中 β_i 是 Betti 数. 由(4.14),

$$\beta_i(\mathfrak{M}, a_{-T}) = \begin{cases} C_{i-r}^{2n}, & i=r, r+1, \cdots, 2n+r, \\ 0, & \text{其余处} \end{cases}$$

因此 a 至少有 $\sum_{i=0}^{2n} C_i^{2n} = 2^{2n}$ 个不同的临界点.

剩下来证明: 若 $u_0(t)$ 是(4.13)的一个非退化周期解, 则 $u_0(t)$ 在 Z 上的投影 z_0 必是函数 a 的非退化临界点.

事实上, 由定义, 方程

$$\dot{w}(t) = JH''_{zz}(t, u_0(t))w(t) \tag{4.15}$$

的基本解矩阵

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = JH''_{zz}(t, u_0(t))W(t), \\ W(0) = id, \end{cases}$$

满足 $1 \notin \sigma(W(2\pi))$.

它等价于线性方程(4.15)没有 2π 周期解, 亦即 $0 \notin \sigma(L-F'(u_0))$(由第一章 § 6.3 中 L 的性质可见 $L-F'(u_0)$ 只有点谱), 从而 $(L-F'(u_0))^{-1}$ 有界.

利用等式(4.6),

$$a''(z_0) = [L - F'(u(z_0))]u'(z_0),$$

而 $$u(z_0)=z_0+v(z_0),\quad u_0=u(z_0),$$
其中 $z_0\in Z$, $v(z_0)\in Z^{\perp}$. 这便导出 $a''(z_0)$有有界逆，即 z_0 是 a 的非退化临界点.

至此定理 4.4 证完.

特别地当 $n=1$ 时，定理 4.4 回答了 Arnold 的猜测.

注 4.4 Arnold 猜测是最近为 Conley-Zehnder[CZ2] 首先证明的. 他们用到较多的关于 Conley 指标[Con1]的结果. 这里的简化证明是作者给出的，见[Ch8].

评注与参考文献

关于代数拓扑的准备知识取自 Greenberg[Gr 1]与 Dold [Do 1].

关于 Morse 理论的基本内容有一本极好的参考书: J. Milnor[Mi 1].§ 2 把 Morse 理论建立在 Hilbert 空间(或 Hilbert-Riemann 流形)上. 这是由 Palais[Pa 1], Palais-Smale[PS1]建立的. 然而我们在这里采用的是 Rothe [Ro 1]的方法. 其中定理 2.1 的证明是综合 Rothe [Ro 1] 与 Marino-Prodi [MP 1]的两个证明改写的. Morse 引理的证明参照了 Nirenberg [Nir 1] 的讲义. 定理 2.6 属于 Gromoll-Meyer[GM 1], 下列文献与书籍可以推荐阅读: Bott[Bo], M. S. Berger[BeM 1], J. T. Schwartz[Sch 1], Gromoll-Meyer[GM 1], 张恭庆[Ch 9], Conley[Co 1].

§ 3 中的材料来源如下: § 3.1 张恭庆[Ch 5], § 3.2 Berger[BeM 1], Marino-Prodi[MP 1], 张恭庆[Ch 9]. § 3.3 张恭庆[Ch 5, 8], Amann-Zehnder[AZ 1]. § 3.4 Bott[Bo 1], 张恭庆[Ch 8]. 在这方面还有一些有趣的重要结果值得介绍: Marino Prodi 的临界集分离定理[MP 2]; 用同伦群刻划临界点, Schwartz[Sch 1], Bahri-Berestycki [BB 2, 3]; 孤立退化临界点的临界群的描写 Gromoll-Meyer[GM 1], 张恭庆[Ch9]; Mountain Pass 点的临界群的描写, 田刚 [Ti 1], Hofer [Hof 2]; 临界群的连续扰动, 张恭庆 [Ch 9], 等.

§ 4 所列的几个例子是很不全面的，材料取自 Amann-Zehnder[AZ 1], 张恭庆[Ch5, 8].

关于 Morse 理论在测地线问题中的应用的详细情形请看 Klingenberg [Kl 1], Schwartz[Sch 1].

关于 Morse 理论在极小曲面中的应用看 Morse, Tompkins [MT 1], Tromba[Tr. 2].

关于Morse理论在Hamilton组方面的进一步应用还请看Conley-Zehnder[CZ 1]

最后，我们要提到Conley关于Morse理论的推广，他把Morse理论推广到向量场(未必是变分结构)，并对一种孤立块规定了Morse指标。参看Conley[Con 1]. 近年有些文献常引用他的结果。

参 考 文 献

[KC 1] 关肇直：泛函分析讲义，高等教育出版社(1958).

[KCF 1] 关肇直、张恭庆、冯德兴，线性泛函分析入门，上海科技出版社(1979).

[Che 1] 陈文嫄，非线性泛函分析；甘肃人民出版社(1982).

[DL 1] 董光昌、李树杰：非线性椭圆方程 Dirichlet 问题无穷多个解的存在性，中国科学，A(1982)，132～138.

[Ch 1] 张恭庆，带间断非线性项的椭圆型偏微分方程的多重解，中国科学，(1977)

[Ch 2] ——；一个变化的山路引理，中国科学，A．(1983)，306～317.

[Ch 3] ——；变分方法与上、下解，中国科学，A．(1983)，318～326.

[CH 1] 张恭庆、洪崇威，半线性球面波方程(待发表).

[L 1] 刘嘉荃：半线性弦与梁的振动，博士论文(1983).

[Ti 1] 田刚：关于 Mountain Pass 引理，科学通报(1983)，14，833～835.

[Ad 1] R. A. Adams; *Sobolev spaces*, Acad. Press(1975).

[Ag 1] S. Agmon; *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, (1965).

[ADL 1] S. Agmon, A. Douglise, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.* I, 12(1959), 623～727, II, 17(1964), 35～92.

[ALP 1] S. Ahmad, A. C. Lazer, J. L. Paul; Elementary critical point theory and perturbations of elliptic BVP at resonance. *Indiana Univ. Math. J.* 25(1976), 933～944.

[Amb 1] A. Ambrosetti; Recent advances in the study of the existence of periodic orbits of Hamiltonian systems, Preprint SMS Trieste (1982).

[AM 1] A. Ambrosetti, G. Mancini; On a theorem by Ekeland and Lasry concerning the number of periodic Hamiltonian trajectories, *J. Diff. Eq.* (1982).

[A. R 1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz; Dual variational methods in critical point theory and applications, *J, Funct. Anal.* 14(1973), 349～381.

[Ama 1] H. Amann; Saddle points and multiple solutions of differential equations, *MZ*. 169(1979), 127～166.

[Ama 2] H. Amann; A note on degree theory for gradient mappings, *PAMS*, 84(1982), 591.

[AZ 1] H. Amann, E. Zehnder; Nontrivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear diff. eq. *Annali scuola norm. Pisa*(1980).

[AZ 2] ——; Multiple periodic solutions for a class of nonlinear autonomous wave equations, *Houston J. Math.* (1980).

[AZ 3] ——; Periodic solutions of asymptotic linear Hamiltonian systems, *Manuscripta, Math.* 32(1980), 149~189.

[Ar 1] V. I. Arnold; *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer Verlag (1978).

[Ar. 2] ——; Math. developments arising from Hilbert problems, *Proc. Symp. in Pure Math. AMS* Vol XXVIII. 1976.

[Au 1] Aubin; *Nonlinear analysis on manifolds*, Springer Verlag (1982).

[BB 1] A. Bahri, H. Berestycki: A perturbation method in critical point theory and applications, *TAMS*, 267(1981), 1~32.

[BB 2] ——; Existence of forced oscillations for nonlinear diff eq., *Comm. Pure Appl. Math.* (to appear).

[BB 3] ——; Forced vibration of superquadratic Hamiltonian systems, *Acta Math.* (to appear).

[Bar 1] V. Barbu: Nonlinear semigroups and diff. eq. in Banach spaces, *Nordhof* (1976).

[BBF 1] P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato; Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity, Preprint (1981).

[Ben 1] V. Benci; Some critical point theorems and applications, *Comm. Pure Appl. Math.* 33(1980), 147~172.

[Ben 2] ——; A geometrical index for the group S^1 and some applications to the study of periodic solutions of ODE. *Comm. Pure Appl. Math.* 34 (1981) 393~432.

[Ben 3] ——; On the critical point theory for indefinite functionals in the presence of symmetries, Preprint (1980).

[BR 1] V. Benci, P. H. Rabinowitz, Critical point theorems for indefinite functionals, *Inv. Math.* 52(1979), 241~273.

[BeH 1] H. Berestycki; Orbites periodiques de systems conservatifs, Seminair. Goulaouic-Meyer-Schwartz XXIV 1981~82.

[BL 1] H. Berestycki, J. M. Lasry; Existence of multiple periodic orbits for Hamiltonian systems on a starshaped energy surface, preprint (1982).

[BeM 1] M. S. Berger; *Nonlinearity and functional analysis*, Acad. Press. (1977).

[BeM 2] ——; On Riemannian Structures of Prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds. *J. Diff. Geometry* 5(1971), 325~332.

[Bö 1] R. Böhme; Die Lösungen der Verzweigungs gleichungen für nichtlineare Eigenwert problems *M. Z.* 127(1972). 105~126.

[Bo 1] R. Bott; Lectures on Morse theory: Old and New, *BAMS* 7(1982) 331 ~358.

[Bre 1] H. Brezis; Analyse fonctionnelle, theorie et applications, Masson. (1982).

[Bre 2] ——; Operateurs maximaux monotones et semigroupes nonlineaires dans les espaces de hilbert. North Holland Elsevier, (1973).

[BH 1] A. Haraux; Image d'une somme d'opérateurs monotones et applications, *Israll J. of Math*, 23, (1976), 165~186.

[BCN 1] H. Brézis, J. M. Coron, L. Nirenberg; Free vibration for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz, *Comm Pure Appl. Math*. 33(1980), 667~684.

[BN 1] H. Brezis, L. Nirenberg; Characterization of the ranges of some nonlinear operators and applications to BVP. *Ann. Sc. norm. Pisa*. 5(1978), 225~326.

[BN 2] ——; Forced vibrations of a nonlinear wave equation. *Comm. Pure. Appl. Math*. 31(1978), 1~30.

[BN 3] ——; Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponent, *Comm. Pure Appl. Math*. 1983, July.

[Bro 1] F. Browder; Existence theorems for nonlinear PDE. Proc. Symp. Pure. Math. 16 Global analysis (ed. by S. S. Chern) *AMS* (1970) 1~60.

[Bro 2] ——; Nonlinear eigenvalue problems and group invariance, Funct. Analy. related fields, Springer (1970). 1~58.

[Bro 3] ——; Infinite dimensional manifolds and nonlinear elliptic eigenvalue problems, *Annals of Math*. 82(1965), 459~477.

[Bro 4] ——; Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems, *BAMS* 71(1968). 174~183.

[Car 1] H. Cartan; Differential calculus, Hermann, Paris (1971).

[Cas 1] A. Castro; A two point BVP with jumping nonlinearities, *PAMS* 79 (1980), 207~211.

[CLa 1] A. Castro, A. C. Lazer; Critical point theory and the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem *Annali di Mat. Pura ed Appl*. (IV) 70(1979), 113~137.

[Ce 1] G. Cerami; Un criterio di esistenza per i punti critici so variete illimitate, *Rend. dell' academia di sc*. lombardo, 112 (1978), 332~336.

[Ch 4] K. C. Chang; Variational methods for nondifferentiable functionals and their application to PDE. *J. Math. Anal. Appl*. 80(1981), 102~129.

[Ch 5] ——; Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse

theory, *Comm. Pure Appl. Math.* 34(1981), 693～712.

[Ch 6] ——; Morse theory on Banach spaces and its applications, *Chinese Annales of Math.* (1983).

[Ch 7] ——; An extension on the minimax principle, Proc. Symp. DD_3, to appear.

[Ch 8] ——, Applications of homology theory to differential equations, *MSRI Berkeley*, 64～83 (1983).

[Ch 9] ——, Morse theory and its applications, *Lectures on Séminaire de Mathématiques*, Supérieures Univ. de Montréal (1983).

[ChL 1] K. C. Chang, G. C. Liu; The existence of infinie many solutions for the semilinear wave equation, to appear.

[CLD 1] K. C. Chang, S. Li, G. C. Dong; A new proof and an extension of a theorem of P. H. Rabinowitz concerning nonlinear wave equations, *Nonlinear Analysis* (1982).

[CS 1] K. C. Chang, L. Sanchez; Nontrivial periodic solutions of a nonlinear beam equation, *Math. Methods in Appl. Sci* (1982).

[CWL 1] K. C. Chang, S. P. Wu, S. Li; Multiple periodic solutions for an asymptotically linear wave equation, *Indiana. Univ. Math. J.* 31 (1982), 721～731.

[ClD 1] D. C. Clark; A variant of Ljusternik-Schnirelman theory, *Ind. Univ. Math. J.* 22(1972), 65～74.

[ClF 1] F. H. Clarke; A new approach to Lagrange mulipliers, *Math. Oper. Res.* 1(1976), 165～174.

[ClF 2] ——; Periodic solutions to Hamiltonian inclusions, *J. Diff. Eq.* (1978).

[CE 1] F. H. Clarke, I. Ekeland; Hamilton trajectories having prescribed minimal period, *Comm. Pure Appl. Math.* 33(1980) 103～116.

[Cob 1] C. V. Coffman; A minimum-minimax principle for a class of nonlinear integral equations, *J. d'Analyse Math.* 22(1969), 391～419.

[CF 1] E. Conner, E. E. Floyd; Fixed point free involutions and equivariant maps, *BAMS*, 66(1960), 416～441.

[Con 1] C. Conley; Isolated invariant sets and the Morse index. *Mem AMS* (1978).

[CZ 1] C. Conley, E. Zehnder; Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations (to appear).

[CZ 2] ——; The Birkhoff Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold, *Invet. Math.* 73(1983), 33～49.

[Cor 1] J. M. Coron; Resolution de l'equation $Au+Bu=f$ ou A est lineaine et B dérive d'un potentiel convex, Ann. Fac. Sc. Toulouse (to appear).

[Cor 2] ——; Periodic solutions of a nonlinear wave equation without

assumption of monotonicity, *Math. Annalen* 262 (1983) 273～285.

[Cro 1] J. Cronin; Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, AMS, Providence, (1964).

[Diu 1] J. Dieudonne, *Foundations of modern analysis*, Vol. I. Acad. Press, (1969) (中译本,郑维行、苏维宜译. 科学出版社, 1982).

[Do 1] Dold; *Lectures on algebraic topology*, Springer Verlag (1980).

[Dug 1] J. Dugundji; An extension of Tietze's theorem, *Pacif. J. Math.* 1 (1951), 353～367.

[DG 1] J. Dugundji, A. Granas; *Fixed point theory*, Vol, 1. Monografie Mate. Warszawa. (1982)

[EK 1] I. Ekeland; Non-convex minimization problems. *BAMS* 1(1979), 443～474.

[Ek 2] ——; Periodic solutions of Hamiltonian equations and a theorem of P. Rabinowitz, *J. Diff. Eq.* 34(1979), 523～534.

[EL 1] I. Ekeland, J. M. Lasry; On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface, *Annals of Math.* 112 (1980), 283～319.

[ET 1] I. Ekeland, R. Temam; *Convex analysis and variational problems*, North Holland (1976).

[F 1] E. Fadell; The relationship between Ljusternik-Schnirelman category and the concept of genus, *MRC Tech. Rep.* #1905(1979).

[FR 1] E. Fadell, P. H. Rabinowitz; Generalized cohomological index theories for Lie group actions with applications to bifurcation questions for Hamiltonian systems, *Invet. Math.* 45(1978), 139～174.

[FR 2] ——, Bifurcation for odd potential operators and an alternative topological index *J. Funct. Analy.* 26(1977), 48～67.

[FHR 1] E. Fadell; Husseini, P. H. Rabinowitz; Borsuk Ulam theorems for arbitrary S^1 actions and applications, *MRC Tech. Rep.* #2301(1981).

[Ga 1] E. Gagliardo; proprita di alcune classi di funzioni an piu variabili, *Ric. di Mate.* 7(1958), 102～137, 8(1959), 24～51.

[GT 1] D. Gilbarg, N. S. Trudinger; *Elliptic PDE of second order*. Springer Verlag (1977). (中译本,叶其孝等译,上海科技出版社,1981)

[Gr 1] M. J. Greenberg; *Lectures on algebraic topology*, Benjamin (1967).

[GM 1] D. Gromoll, W. Meyer; On differentiable functions with isolated critical points, *Topology* 8(1969), 361～369.

[GP 1] V. Guillemin, A. Pollak; *Differential topology*, Prentice Hall (1969).

[Ha 1] Hanner, Some theorems on absolute neighbourhood retracts, *Arkiv Math.* 1(1951), 389～408.

[Hei 1] E. Heinz; An elementary analytic theory of degree of mappings in

n-dimensional spaces, *J. Math. Mech.* 8 (1959), 231~247.

[Hil 1] S. Hildbrandt; Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings, *Proc. Symp. DD*$_1$ Vol. 1 (1982), 481~616.

[Hof 1] H. Hofer; A new proof of a result of Ekeland and Lasry concerning the number of periodic Hamiltonian trajectories on a prescribed energy surface BUMI (to appear).

[Hof 2] ——; A note on the topological degree at a critical point of mountain pass-type PAMS (to appear).

[Hor 1] L. Hörmander; *Linear differential operators*, Springer Verlag (1963).

[KW 1] J. Kazdan, F. Warner; Curvature functions for compact 2-manifolds, *Ann. of Math.* 99 (1974), 14~47.

[KN 1] J. L. Kelley, I. Namioka; *Linear topological spaces*, Van Norstrand (1963).

[Kl 1] W. Klingenberg; *Lectures on geodesics*, Springer Verlag, (1978).

[Kra 1] M. A. Красносельский; *Топологические Методы в Теории Нелейных интегральных уравнения.* Гостех (1956).

[Kra 2] ——; The operator of translation along the trajectories of diff. eq. Transl. *AMS*. Vol. 19, (1968).

[Kre 1] M. Г. Крейн, M. A. Рутман, Линейные операторы оставляющие инвариантный фнус в пространстве банах. *УМН* 3 (1948) 3~9.

[Kui 1] N. H. Kuiper; C^1-equivalence of functions near isolated critical points, Symp. on infinite dimensional topology, Annals study, 69. Princeton Univ. Press. (1972).

[LL 1] E. Landesman, A. Lazer; Nonlinear perturbation of linear elliptic BVP at resonance, *J. Math. Mech.* 19 (1970), 609~623.

[Lan 1] S. Lang; *Introduction to differential manifolds*, Interscience Publishers, (1962).

[Lav 1] H. Lavicarova; Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equation in one dimension, *Czech. Math. J.* 19 (1969), 324~342.

[Lio 1] J. L. Lions; *Quelques méthodes des résolution des problémes aux limites nonlinéaires.* Dunod-Ganthier Villars (1969).

[LM 1] J. L. Lions, E. Magenes; *Nonhomogeneous BVP and applications*. Vol. I, Springer Verlag, (1972).

[Lju 1] Л. A. Люстерник; Topologische Grudlagen der allgemainen Eigenwerttheorie, *Monatsch Math. Phys.* 37 (1930), 125~130.

[LS 1] Л. A. Люстерник, Л. Г. Шнирельман; *Methodes topologiques dans les problèmes Variationnelles* Paris, Hermann (1934).

[Llo 1] N. G. Lloyd; *Degree theory*, Cambridge Univ Press (1977).

[Ma 1] A. Marino; La biforcazione nel caso variazionalle, *Proc. Conf del*

seminario di mate. Univ. Bari (1972).

[MP 1] A. Marino, G. Prodi; La teoria di Morse per spazi di Hilbert, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 41 (1968), 43～68.

[MP 2] ——; Metodi perturbativi nella teoria di Morse, *BUMI* 4, 11, *suppl Fasc*. 3 (1975), 1～32.

[Mi 1] J. M. Milnor; *Morse theory, Annals of study*, Princeton (1965).

[Mi 2] ——; *Topology from the differentiable viewpoint*, The Univ. Press Virginia (1965).

[MC 1] M. Morse, S. S. Cairns; *Critical point theory in global analysis and differential topology*, Acad. Press (1969).

[MT 1] M. Morse; C. Tompkins; The existence of minimal surfaces of general critical types *Ann. of Math*. 40 (1939), 443～472.

[Mos 1] J. Moser; On a nonlinear problem in differential geometry, *Dynamical Systems*, Acad. Press (1973).

[Mos 2] ——; Periodic orbits near equilibrium and a theorem by A. Weinstein, *Comm. Pure Appl. Math*. 29 (1976), 727～747.

[Na 1] M. Nagumo; A theory of degree of mappings based on infinitesimal calculus, *AJM*, 73, (1951), 485～496.

[Ne 1] Z. Nebari; Characteristic values associated with a class of nonlinear second order diff. eq. *Acta Math*. 105 (1961), 141～175.

[Ni 1] W. M. Ni, Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations, *J d'Analyse Math*. 37 (1980), 248～275.

[Nir 1] L. Nirenberg; *Topics on nonlinear functional analysis*, Courant Inst. Lect. Notes (1974).

[Nir 2] ——; Variational and topological methods in nonlinear Problems, *BAMS* 4, (1981), 267～302.(中译,数学译林,李树杰译,1982, 4)

[Nir 3] ——; Comments on nonlinear problems, Preprint (1981).

[Os 1] R. Osserman; *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand (1969).

[Pa 1] R. S. Palais; Morse theory on Hilbert manifolds, *Topology* 2 (1963), 299～340.

[Pa 2] ——; Lusternik Schnirelman theory on Banach manifolds, *Topology* 5 (1966), 299～340.

[Pa 3] ——; Homopoty theory of infinite dimensional manifolds, *Topology* 5 (1966), 115～132.

[Pa 4] ——; Critical point theory and the minimax principle, *Proc. Sym. Pure Math*. 15 (ed. S. S. Chern), *Global Analysis*, AMS (1970), 185～212.

[PS 1] R. S. Palais, S. Smale; A generalized Morse theory, *BAMS*, 70 (1964), 165～171.

[Ra 1] P. H. Rabinowitz; Periodic solutions of nonlinear hyperbolic PDE, *Comm. Pure Appl. Math.* 20(1967), 145~205.

[Ra 2] ——; Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, *Edicioni Cremonese, Roma* (1974), 141~195.

[Ra 3] ——; Free vibrations for a semilinear wave equation. *Comm. Pure Appl. Math.* 31(1978), 31~68.

[Ra 4] ——; Periodic solutions of Hamiltonian systems, *Comm. Pure Appl. Math.* 31(1978), 157~184.

[Ra 5] ——; Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic PDE. *Ann. Scuola norm. Pisa* (1978).

[Ra 6] ——; Some minimax theorems and applications to nonlinear PDE. *Nonlinear Analysis*. Acad. Press. (1978), 161~177.

[Ra 7] ——; A variational method for finding periodic solutions of differential equations, *Nonlinear evolution eq.* (ed. M. Crandall) Acad. Press (1978), 225~251.

[Ra 8] ——; Some aspects of nonlinear eigenvalue problems, *Rocky Mtn. J. Math.* 3(1973), 167~202.

[Ra 9] ——, A bifurcation theorem for potential operators *J. Funct Anal.* 25; (1977), 412~424.

[Ro 1] E. Rothe; Morse theory in Hilbert space, *Rocky Mtn. J. Math.* 3 (1973), 154~166.

[Ro 2] ——; Critical point theory in Hilbert space under regular boundary conditions, *J. Math. Analy Appl.* 36(1971), 377~431.

[Ro 3] On the connection between critical point theory and Leray Schander degree. *J. Math. Analy Appl.* 88(1982), 265~269.

[Sch 1] J. T. Schwartz; *Nonlinear functional analysis*; Gordon Breach(1969)

[Sch 2] ——; Generalizing the Ljusternik-Schnirelman theory of critical points, *Comm. Pure Appl. Math.* 17, (1964), 307~315.

[Sm 1] S. Smale; Morse theory and a nonlinear generalization of Dirichlet problem, *Ann of Math.* 17(1964) 307~315.

[Sm 2] ——; An infinite dimensional version of Sard's theorem, *Amer. J. Math.* 87, (1965), 861~867.

[So 1] С. Л. Соболев; *Некоторые Применения функционального Анализа в математической физике*, Ленинград(1950) (中译本,王柔怀,等译, 科学出版社, 1959)

[Ste 1] E. M. Stein; *Singular integrals and differentiability of functions*, Princeton Univ Press, (1970).

[Str 1] M. Struwe; Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear BVP, *Manus Math.* 32,

(1980), 335~364.

[Str 2] ——; Multiple solutions of differential equations without the Palais Smale Condition, Preprint, Univ. Bonn no. 541 (1982).

[Te 1] N. M. Temme; Nonlinear analysis, Vol. I, II, Math. Centrum (1976).

[Tr 1] A. J. Tromba; A general approach to Morse theory, *J. Diff. Geometry* (1978).

[Tr 2] ——; On the number of simply connected minimal surfaces spanning a curve, *Mem. AMS*. 194 (1977).

[Uh 1] K. Uhlenbech; Morse theory on Banach manifolds, *J. Funct. Anal.* **10**, (1972), 430~445.

[Vai 1] M. M. Вайнберг; *Вариационные Методы исследования нелинейных операторов*, Гостех. (1956)

[We 1] A. Weinstein; Periodic orbits for convex Hamiltonian systems, *Annals of Math*. 108 (1978), 507~518.

[We 2] ——; Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems, *Inv. Math*. 20 (1973), 47~57.

[Wi 1] M. Willem; Density of the ranges of potential operators, Rapport no. 137 Univ Catholique de Louvain, (1980).

[Wu 1] S. P. Wu; A resonance case for an asymptotically linear vibration string equation, *J. Math. Analy Appl.* (1982).

[Yo 1] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer Verlag, 4 ed. (1978).

现代数学丛书书目

陆启铿:
　　典型流形与典型域
谷超豪:
　　齐性空间的微分几何
夏道行:
　　无限维空间上测度和积分论(上)
叶彦谦:
　　极限环论(第二版)
苏步青:
　　计算几何
龚昇:
　　多复变数的奇异积分
李炳熙:
　　高维动力系统的周期轨道:理论和应用
张恭庆:
　　临界点理论及其应用

SERIES IN MODERN MATHEMATICS

Liu Qi-keng:
　Canonical Manifold and Canonical Region
Gu Chao-hao:
　Differential Geometry of Homogeneous Space
Xia Dao-xing:
　Measure and Integration Theory on Infinite Dimensional Spaces:
　　Abstract Harmonic Analysis
Ye Yan-qian:
　Theory of Limit Cycle (second edition)
Su Bu-qing, Liu Ding-yuan:

Computational Geometry

Gong Sheng:

Singular Integral in Several Complex Variables

Li Bing-xi:

Periodic Orbits of Autonomous Ordinary Differential Equations: Theory and Applications

Chang Kung-Ching:

Critical Point Theory and its Applications